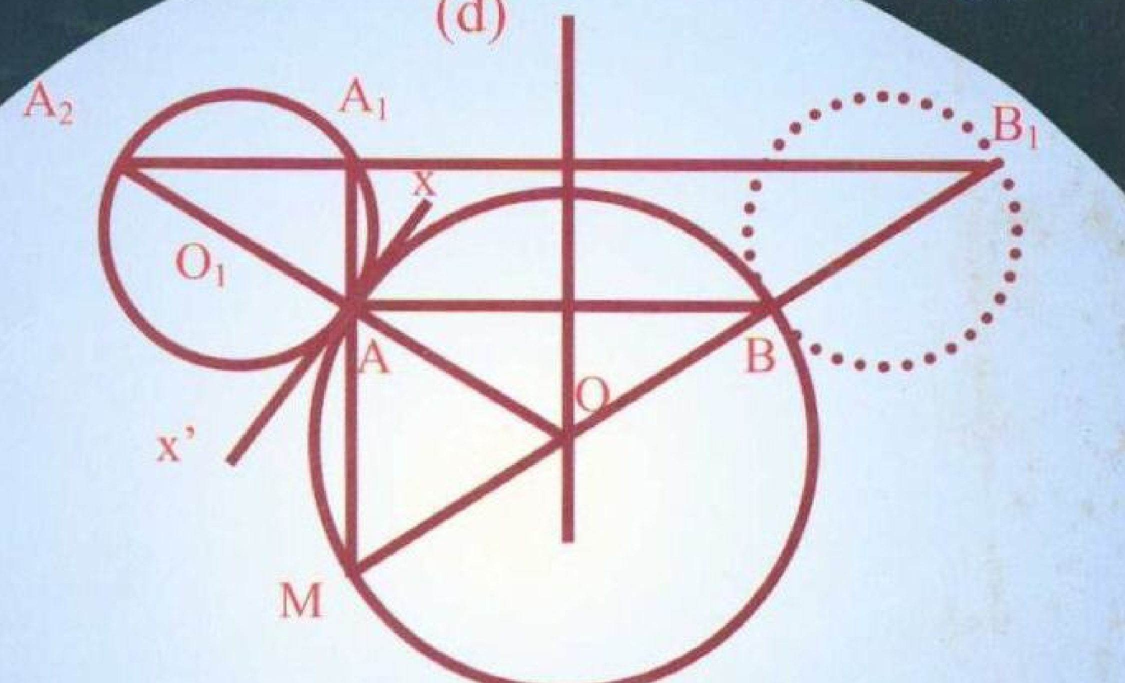
LÊ HỒNG ĐỨC (chủ biên)
LÊ BÍCH NGỌC - LÊ HỮU TRÍ

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Hình học 10

*(Dùng cho học sinh ban A
và luyện thi đại học)*



- 450 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- 120 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
LÊ BÍCH NGỌC - LÊ HỮU TRÍ

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
HÌNH HỌC 10

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)

- 450 VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- 120 CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức tổng chủ biên.

Bộ sách gồm 6 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Đại số & Giải tích 11
Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12

Mục tiêu của bộ sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ sách học tập bổ ích.

Bộ sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán tốt nghiệp PTTH hoặc vào các trường đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
HÌNH HỌC 10

được chia thành 3 chương:

Chương I: Vectơ
Chương II: Hệ thức lượng trong tam giác và trong đường tròn
Chương III: Các phép biến hình

bao gồm 13 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 81 dạng toán cơ bản và nâng cao của Hình học 10. Mỗi bài toán được chia thành 4 phần:

Phần I: ***Kiến thức cơ bản****: trong phần này tóm lược kiến thức cơ bản của sách giáo khoa cùng một vài mở rộng quan trọng, tiếp tới là việc minh hoạ phương pháp giải các dạng toán thuộc chủ đề này dưới dạng* ***Bài toán*** *với các bước thực hiện.*

Phần II: ***Ví dụ minh hoạ**: trong phần này ngoài những ví dụ để các em học sinh hiểu được phương pháp giải cho mỗi dạng toán, chúng tôi còn đưa thêm vào các bài toán trong các kỳ thi tuyển sinh nhằm mục đích giúp các em học sinh dần tiếp cận với những đòi hỏi của thực tế.*

Phần III: ***Bài tập đề nghị**: cùng với những bài tập để các em học sinh luyện tập thêm kỹ năng giải toán, còn có các ví dụ nâng cao và các câu hỏi trắc nghiệm theo qui định mới của Bộ Giáo dục.*

Phần IV: ***Hướng dẫn**: phần này trả lời các câu hỏi trắc nghiệm cùng với lời giải cho một số bài tập tiêu biểu.*

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Ths. Lê Hồng Đức

Điện thoại: (04) 7196671

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Hà nội, ngày 31 tháng 10 năm 2003

LÊ HỒNG ĐỨC

CHƯƠNG I

VECTƠ

CHỦ ĐỀ 1

VECTƠ - CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. ĐỊNH NGHĨA

Véctơ là đoạn thẳng:

- Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.
- Hướng từ gốc đến ngọn gọi là hướng của véctơ.
- Độ dài của đoạn thẳng gọi là độ dài của véctơ.

Véctơ có gốc A, ngọn B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ ký hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$

Một véctơ còn được kí hiệu bởi một chữ cái in thường phía trên có mũi tên như : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... độ dài của $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Véctơ không, kí hiệu $\vec{0}$ là vectơ có:

- Điểm gốc và ngọn trùng nhau.
- Độ dài bằng 0.
- Hướng bất kì.

Hai vectơ cùng phương: Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng phương

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ A, B, C, D \text{ thẳng hàng} \end{array}\right.$$

Hai vectơ cùng hướng: Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ \text{hai tia } AB, CD \text{ cùng hướng} \end{array}\right.$$

Hai vectơ ngược hướng: Hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ \text{hai tia } AB, CD \text{ ngược hướng} \end{array}\right.$$

Góc của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là góc tạo bởi hai tia Ox, Oy, lần lượt cùng hướng với hai tia AB, CD.

- Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ không cùng hướng thì $0^0 < \widehat{xOy} \le 180^0$.
- Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng thì $\widehat{xOy} = 0^0$.

Hai vectơ bằng nhau

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

Hai vectơ đối nhau

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

2. PHÉP CỘNG VECTƠ

Định nghĩa: Tổng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một véctơ được xác định như sau:

- Từ một điểm tùy ý O trên mặt phẳng dựng véctơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
- Từ điểm A dựng véctơ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.
- Khi đó véctơ $\overrightarrow{OB}$ gọi là véctơ tổng hợp của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta viết

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Tính chất của phép cộng véctơ

Với mọi véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, ta có:

Tính chất 1: (Tính chất giao hoán): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất 2: (Tính chất kết hợp): $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Tính chất 3: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Tính chất 4: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

3. PHÉP TRỪ VECTƠ

- Ta có : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- Với $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

4. PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC

Định nghĩa: Tích của vectơ $\vec{a}$ với một số thực k là một vectơ $k.\vec{a}$ được xác định như sau:

a. Với $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k \neq 0$ thì vectơ $k.\vec{a}$

- Cùng phương với $\vec{a}$ và sẽ
    - Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$
    - Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$
- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

b. $0.\vec{a} = k.\vec{0} = \vec{0}$

Tính chất của phép nhân vectơ với số

Với mọi véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và các số thực m, n, ta có:

Tính chất 1. $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

Tính chất 2: $m(n.\vec{a}) = (mn).\vec{a}$.

Tính chất 3: $(m + n).\vec{a} = m.\vec{a} + n.\vec{a}$.

Tính chất 4: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m.\vec{a} + m.\vec{b}$.

Tính chất 5: Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} = m\vec{b}$.

BÀI TOÁN 1

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh một đẳng thức vectơ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

- Quy tắc ba điểm:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, xen điểm C.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.

- Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành ABCD luôn có:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- Quy tắc trung điểm: Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB luôn có:

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

- Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ để thực hiện phép biến đổi tương đương cho đẳng thức cần chứng minh.

Và khi đó ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại (VT ⇒ VP hoặc VP ⇒ VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Tạo dựng các hình phụ.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi VT, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \text{VP, đpcm.}$$

Nhận xét: Để thực hiện việc biến đổi VT ⇒ VP, ta ý thức được rằng cần tạo ra sự xuất hiện của các vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$, do đó trong lời giải trên với vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta xen vào điểm D còn vectơ $\overrightarrow{CD}$ ta xen vào điểm B.

Tư tưởng này được sử dụng khi lựa chọn phép biến đổi VP ⇒ VT, cụ thể:

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi VP, ta có:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \text{VT, đpcm.}$$

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi biểu thức, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\text{, luôn đúng.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác và M là một điểm tuỳ ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Giải

a. Gọi A_1 là trung điểm của BC, do đó:

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA_1} \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{cases} GA = 2GA_1 \\ \overrightarrow{GA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GA_1} \end{cases} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA_1} = -\overrightarrow{GA}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}\text{, đpcm.}$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$$
$$= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$
$$= 3\overrightarrow{MG}\text{, đpcm.}$$

Chú ý: Thông qua kết quả của câu b), ta có thể khẳng định được rằng nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm ΔABC, thật vậy:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv G.$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

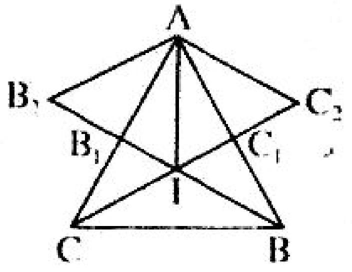
$$a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Giải

Dựng hình bình hành AB_2IC_2 có $AB_2//CC_1$ & $AC_2//BB_1$, ta được:

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB_2} + \overrightarrow{IC_2}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{IB_2}{IB} = \dfrac{C_1A}{C_1B} = \dfrac{b}{a} \\ \overrightarrow{IB_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB_2} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB}. \qquad (2)$$



$$\begin{cases} \dfrac{IC_2}{IC} = \dfrac{B_1A}{B_1C} = \dfrac{c}{a} \\ \overrightarrow{IC_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC_2} = -\frac{c}{a}\,\overrightarrow{IC}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{b}{a}\,\overrightarrow{IB} - \frac{c}{a}\,\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}\text{, dpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

b. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

Bài tập 3: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ lần lượt có trọng tâm là G_1, G_2. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}$

Bài tập 4: Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên đoạn BC, sao cho MB = 2MC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài tập 5: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC, sao cho NC = 2NA. Gọi K là trung điểm của MN.

a. Chứng minh: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

b. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài tập 6: Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác. Chứng minh rằng:

$$\text{tgA}.\overrightarrow{HA} + \text{tgB}.\overrightarrow{HB} + \text{tgC}.\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Bài tập 7: Cho tam giác ABC. Lấy điểm M bất kỳ trong tam giác. Chứng minh rằng:

$$S_{MBC}.\overrightarrow{MA} + S_{MAC}.\overrightarrow{MB} + S_{MAB}.\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Kết quả trên còn đúng không khi M ở ngoài tam giác ?

Bài tập 8: Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sin A.\overrightarrow{IA} + \sin B.\overrightarrow{IB} + \sin C.\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Có thể tổng quát kết quả trên được không cho đa giác lồi n cạnh $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn tâm I, tức là:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin A_i.\overrightarrow{IA_i} = \vec{0}.$$

Bài tập 9: Cho tam giác đều ABC tâm O, M là điểm tuỳ ý bên trong của tam giác được chiếu xuống ba cạnh tại D, E, F. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Bài tập 10: Cho tam giác ABC và điểm M tuỳ ý.

a. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b. Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CK}$.

Bài tập 11: Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

Bài tập 12: Cho tứ giác ABCD, I và J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$

Bài tập 13: Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2...A_n$, tâm O. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 3: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu ΔABC nhọn

Gọi B_1, C_1 theo thứ tự là chân được của các đỉnh B, C. Dựng hình bình hành AB_2IC_2 có $AB_2//CC_1$ và $AC_2//BB_1$.

Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{HA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{HB}$ và $\overrightarrow{HC}$ ⇒ đpcm.

Trường hợp 2: Nếu ΔABC tù - *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 13: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày:

Cách 1: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu n = 2k.

Khi đó với đỉnh bất kỳ của đa giác đều có đỉnh đối xứng với nó qua O ⇒ đpcm.

Trường hợp 2: Nếu n = 2k − 1.

Khi đó các đỉnh $A_2, ..,A_n$ chia thành hai phần đối xứng qua trục OA_1, bằng cách lập tổng các cặp vectơ đối xứng ⇒ đpcm.

Cách 2: Gọi $\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$.

Nhận xét rằng khi quay đa giác một góc bằng $\frac{2\pi}{n}$ thì:

- Đa giác vẫn không đổi, nên tổng $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA}$.
- Vectơ $\overrightarrow{OA}$ sẽ bị quay theo cùng chiều một góc $\frac{2\pi}{n}$.

Suy ra vectơ $\overrightarrow{OA}$ có hướng tuỳ ý ⇔ $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$, đpcm.

BÀI TOÁN 2

BIỂU DIỄN VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong mục này chúng ta giải quyết đòi hỏi "*Biểu diễn một vectơ thành tổ hợp vectơ*", dựa trên định lý cơ bản sau:

Định lý: Cho trước hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{c}$ bao giờ cũng tìm được một cặp số thực α, β duy nhất, sao cho:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ quan tâm tới phương pháp thực hiện được miêu tả trong bài toán sau:

Bài toán: Biểu diễn một vectơ thành tổ hợp vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Hướng 2: Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Chú ý: Trong một vài trường hợp cần sử dụng cơ sở trung gian, điều này chúng ta sẽ thấy trong ví dụ 2.b.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

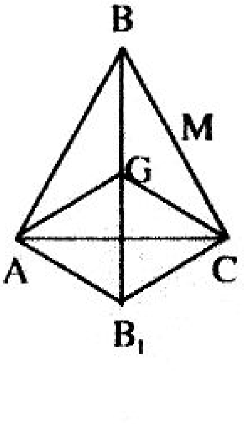
Ví dụ 1: Cho ΔABC, gọi G là trọng tâm tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Hãy biểu diễn các vectơ sau theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$:

a. $\overrightarrow{CB_1}$.

b. $\overrightarrow{AB_1}$.

c. $\overrightarrow{MB_1}$, với M là trung điểm BC.

Giải



Từ giả thiết suy ra AB_1CG là hình bình hành.

a. Ta được:

$$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

b. Ta được:

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

c. Ta được:

$$\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI=3BI và J là điểm trên BC kéo dài sao cho 5JB = 2JC.

a. Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

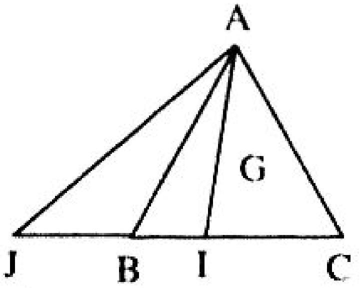
b. Gọi G là trọng tâm ΔABC, tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

Giải

Từ giả thiết ta được:

$$\begin{cases} 2CI = 3BI \\ \overrightarrow{IC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}. \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 5JB = 2JC \\ \overrightarrow{JB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{JC} \end{cases} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}. \qquad (2)$$



a. Từ (1), ta được:

$$2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}. \qquad (3)$$

Từ (2), ta được:

$$5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}. \qquad (4)$$

b. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \qquad (5)$$

Mặt khác từ hệ tạo bởi (3) và (4), ta nhận được:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \text{ và } \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}. \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5) ta nhận được:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{CP}$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho IB=3IC.

a. Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

b. Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho JA = 2JC và KB = 3KA. Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{JK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

c. Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

☐ $\overrightarrow{BC} = 10\overrightarrow{AI} + 24\overrightarrow{JK}$. ☐ $\overrightarrow{BC} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, gọi G là trọng tâm tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Hãy biểu diễn các vectơ sau theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AB_1}$:

a. $\overrightarrow{AB}$.

☐ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB_1})$. ☐ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB_1})$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB_1}$. ☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AB_1}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Hãy tính các vectơ sau theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

a. $\overrightarrow{AI}$, với I là trung điểm BO.

☐ $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{BG}$, với G là trọng tâm ΔOCD.

☐ $\overrightarrow{BG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: (Đề 101): Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy biểu diễn các vectơ sau theo các vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

a. $\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \sqrt{3}\,\vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{AD}$.

☐ $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v}$. ☐ Khác.

c. $\overrightarrow{AF}$.

☐ $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$. ☐ Khác.

d. $\overrightarrow{EF}$.

☐ $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$. ☐ $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. Ta được $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. Ta được $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

c. Ta được $\overrightarrow{BC} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK}$.

Bài tập 3:

a. Ta được $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB_1})$.

b. Ta được $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB_1}$.

Bài tập 4:

a. Ta được $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

b. Ta được $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 5:

a. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

b. $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$.

c. $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

d. $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

BÀI TOÁN 3

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ MÃN MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Xác định điểm M thoả một đẳng thức vectơ cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

a. Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng

$$\overrightarrow{OM} = \vec{v},$$

trong đó điểm O và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

b. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B. Xác định điểm M biết:

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \qquad (1)$$

Giải

Ta tính AM theo AB.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Điểm M hoàn toàn được xác định.

Ví dụ 2: Cho hai điểm A, B và một vectơ $\vec{v}$. Xác định điểm M biết:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{v} \qquad (1)$$

Giải

Gọi O là trung điểm của AB.

Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\vec{v}.$$

Điểm M hoàn toàn được xác định.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC, sao cho NC = 2NA.

a. Xác định điểm K sao cho

$$3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}. \qquad (1)$$

b. Xác định điểm D sao cho

$$3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Giải

a. Từ giả thiết ta nhận thấy:

$$\begin{cases} AB = 2AM \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AM} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}. \qquad (3)$$

$$\begin{cases} AC = 3AN \\ \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AN} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}. \qquad (4)$$

Thay (3), (4) vào (1), ta được:

$$6\overrightarrow{AM} + 6\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

$\Leftrightarrow$ K là trung điểm MN.

b. Ta có:

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{AD} - (\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}). \qquad (5)$$

Thay (5) vào (2), ta được:

$$3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12[\overrightarrow{AD} - (\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC})] = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow$ D là trung điểm BC.

Ví dụ 4: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha + \beta \neq 0$.

a. CMR tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b. Từ đó suy ra với điểm bất kỳ M, ta luôn có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}$.

Giải

a. Ta có:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{AI} = \beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

Vì A, B cố định nên vectơ $\frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta có:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} + (\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB})$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét quan trọng:

1. Nếu $\alpha = \beta = 1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB.

2. Bài toán trên được mở rộng tự nhiên cho ba điểm A, B, C và bộ ba số thực α, β, γ cho trước thoả mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, tức là:

a. Tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

b. Từ đó suy ra với điểm bất kỳ M, ta luôn có

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI}.$$

và khi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì I là trọng tâm ΔABC.

3. Việc mở rộng cho n điểm A_i, $i = \overline{1,n}$ và bộ n số thực α_i, $i = \overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, xin dành cho bạn đọc.

4. Kết quả trên được sử dụng để giải bài toán:

"Cho n điểm A_i, $i = \overline{1,n}$ và bộ n số thực α_i, $\overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức vectơ

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = k\overrightarrow{MI} \qquad (1)$$

thoả mãn với mọi điểm M."

Phương pháp giải

Vì (1) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M≡I, khi đó:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{IA_i} = k\overrightarrow{II} = \vec{0} \qquad (2)$$

- Xác định được điểm I từ (2).
- Từ (2), suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \overrightarrow{MI}.$$

Từ (1) và (3), suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD, M là điểm tuỳ ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho các đẳng thức vectơ sau thoả mãn với mọi điểm M:

a. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MI}$. (1)

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MJ}$. (2)

c. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MK}$. (3)

Giải

a. Vì (1) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M≡I, khi đó:

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{II} = \vec{0}. \qquad (1.1)$$

- Từ (1.1), ta được:

$$2\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{xác định được điểm I.}$$

- Từ (1.1), ta được:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2+1)\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MI}. \qquad (1.2)$$

Từ (1) và (1.2), suy ra:

$$3\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow k = 3.$$

b. Vì (2) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M≡J, khi đó:

$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = k\overrightarrow{JJ} = \vec{0}. \qquad (2.1)$$

- Gọi E là trung điểm AB, từ (2.1), ta được:

$2\overrightarrow{JE} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ J là trung điểm của CE.

- Từ (2.1), ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1+1+2)\overrightarrow{MJ} = 4\overrightarrow{MJ}. \qquad (2.2)$$

Từ (2) và (2.2), suy ra:

$$4\overrightarrow{MJ} = k\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow k = 4.$$

c. Vì (3) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với M≡K, khi đó:

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = k\overrightarrow{KK} = \vec{0}. \qquad (3.1)$$

- Gọi G là trọng tâm ΔABC, từ (3.1), ta được:

$3\overrightarrow{KG} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow$ K là trung điểm của GD.

- Từ (3.1), ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = (1+1+1+3)\overrightarrow{MK} = 6\overrightarrow{MK}. \qquad (3.2)$$

Từ (3) và (3.2), suy ra:

$$6\overrightarrow{MK} = k\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow k = 6.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tam giác ABC.

a. Tìm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b. Tìm K sao cho: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = CB$

c. Tìm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Bài tập 2: Cho các điểm A, B, C, D, E. Xác định các điểm O, I, K sao cho:

a. $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

b. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

c. $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE}) = \vec{0}$.

Bài tập 3:

a. Cho ba vectơ có phương phân biệt $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, thoả mãn $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. CMR tồn tại tam giác mà bộ vectơ các cạnh trùng với bộ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Có bao nhiêu tam giác như vậy.

b. Cho n vectơ có phương phân biệt $\overrightarrow{a_i}$, $i=\overline{1,n}$, thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{a_i}=\vec{0}$. CMR tồn tại đa giác lồi n cạnh mà bộ vectơ các cạnh trùng với bộ n vectơ $\overrightarrow{a_i}$, $i=\overline{1,n}$. Có bao nhiêu đa giác như vậy.

Bài tập 4: Cho hình bình hành ABCD, M là điểm tuỳ ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho các đẳng thức vectơ sau thoả mãn với mọi điểm M:

a. $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MI}$.

☐ k = 3. ☐ k = 1. ☐ Khác.

b. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{MJ}$.

☐ k = 4. ☐ k = 2. ☐ Khác.

c. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MK}$.

☐ k = 6. ☐ k = 4. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. Gọi M, N, F là trung điểm AB, BC và AC, ta có:

$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OF}+4\overrightarrow{ON}=\vec{0}\Leftrightarrow -2\overrightarrow{FO}+4(\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FO})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{FO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FN}.$$

b. Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{GI}+(\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GI})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}.$$

c. Ta có:

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE})=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KG}+3(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}=\vec{0}\Leftrightarrow$$ K là trọng tâm ΔDEG.

Bài tập 4:

a. k = 3.

b. k = 2.

c. k = 6.

BÀI TOÁN 4

QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán:	Tìm quỹ tích điểm M thoả mãn điều kiện K

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với các bài toán quỹ tích ta cần nhớ rằng:

1. Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
2. $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng k.AB.
3. Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C cho trước thì
   - Với $k \in R$ điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.
   - Với $k \in R^+$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC theo hướng $\overrightarrow{BC}$.
   - Với $k \in R^-$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. (1)

b. $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$. (2)

Giải

a. Gọi I là điểm thoả mãn hệ thức

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ I là trọng tâm ΔABC.

Ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}. \quad (3)$$

Mặt khác nếu gọi E là trung điểm BC, ta được:

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{ME}. \quad (4)$$

Thay (3), (4) vào (1), ta được:

$|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{ME}| \Leftrightarrow$ M thuộc đường trung trực của đoạn IE.

b. Gọi K là điểm thoả mãn hệ thức

$\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0} \Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm K.

Ta được:

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MK}. \quad (5)$$

Mặt khác:

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AE}. \quad (6)$$

Thay (5), (6) vào (2), ta được:

$|\overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{AE}| \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm K, bán kính bằng AE.

Ví dụ 2: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (1)

b. $(1-k)\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (2)

Giải

a. Ta biến đổi (1) về dạng:

$\overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.

b. Ta biến đổi (2) về dạng:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$. (3)

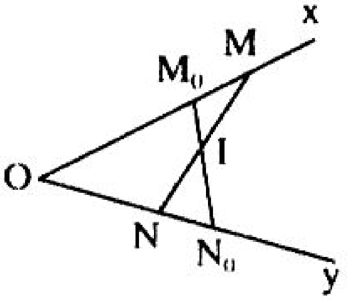
Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và AC, ta được:

$(3) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} - 2k\overrightarrow{MF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MF}$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường trung bình EF của ΔABC.

Ví dụ 3: Trên hai tia Ox và Oy của góc xOy lấy hai điểm M, N sao cho OM + ON = a (a là độ dài cho trước). Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

Giải



Lấy hai điểm M_0, N_0 thuộc Ox, Oy sao cho:

$OM_0 = ON_0 = \frac{a}{2}$.

Giả sử OM = k thì ON = a − k, với $0 \le k \le a$, khi đó:

$\overrightarrow{OM} = \frac{2k}{a}\overrightarrow{OM_0}$ và $\overrightarrow{ON} = \frac{2(a-k)}{a}\overrightarrow{ON_0}$.

Vì I là trung điểm của đoạn MN, ta được:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\left[\frac{2k}{a}\overrightarrow{OM_0} + \frac{2(a-k)}{a}\overrightarrow{ON_0}\right]$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0I} = \frac{k}{a}\overrightarrow{OM_0} + \frac{a-k}{a}\overrightarrow{ON_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0I} = \left(\frac{k}{a} - 1\right)\overrightarrow{OM_0} + \frac{a-k}{a}\overrightarrow{ON_0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{M_0I} = (a-k)(\overrightarrow{ON_0} - \overrightarrow{OM_0})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0I} = \frac{a-k}{a}\overrightarrow{M_0N_0}$$

Vậy quỹ tích I thuộc đoạn M_0N_0.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: (ĐH Mỏ Địa Chất - 99): Cho ΔABC, M là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng.

a. CMR vectơ $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không đổi.

b. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

b. $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

c. $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $k\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{MA} + (1 - k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $k \in \mathbb{R}$.

☐ Đường tròn. ☐ Đường thẳng. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC, hai điểm M, N di động trên các tia AB và AC sao cho

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CA}.$$

Dựng hình bình hành MNCP. Tìm tập hợp những điểm P.

Bài tập 5: Cho ΔABC, các điểm M, N, P di động trên các tia BC, CA và AB sao cho:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}.$$

Dựng hình bình hành MNPQ. Tìm tập hợp những điểm Q.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Ta có:

$$\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}.$$

b. Gọi I là điểm thoả mãn hệ thức

$$3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \text{tồn tại duy nhất điểm I.}$$

Ta được:

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (3 + 2 - 2)\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MI}. \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}. \quad (2)$$

Thay (1), (2) vào hệ thức của câu b), ta được:

$$3|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}BC$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm I, bán kính bằng $\frac{1}{3}BC$.

Bài tập 3:

a. Đường thẳng qua B song song với AC.

b. Đường trung bình song song với AC.

BÀI TOÁN 5

CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh hai điểm trùng nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

Hướng 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tuỳ ý.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC. Lấy các điểm $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ sao cho

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

Giải

Gọi G, G_1 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, ta có:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_1}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B_1}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1C_1})$$

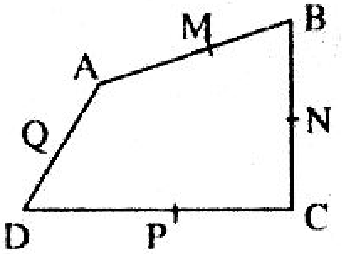
$$= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1}) + 3\overrightarrow{GG_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv G_1.$$

Ví dụ 2: Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Giải

Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ANP và CMQ và O là một điểm tuỳ ý.



Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG_1} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OG_2} \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3), ta suy ra:

$$\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG_2}.$$

Vậy G_1 và G_2 trùng nhau.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài tập 2: Cho ΔABC. Lấy các điểm $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ sao cho

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

a. Chứng minh rằng $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB}$.

b. Xác định vị trí của A_1, B_1, C_1 để AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy.

Bài tập 3: Cho lục giác ABCDEF có $AB \perp EF$ và hai tam giác ACE và BDF có cùng trọng tâm. CMR:

$$AB^2 + EF^2 = CD^2.$$

BÀI TOÁN 6

CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta đi chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \in R. \qquad (1)$$

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ đã biết.

Hướng 2: Xác định vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý: Sử dụng kết quả trong nhận xét quan trọng ở bài toán 3, ta có được phát biểu:

"Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là:

$$\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB},$$

với điểm tuỳ ý M và số thực α bất kỳ".

Đặc biệt khi $0 \le \alpha \le 1$ thì C thuộc đoạn AB.

Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Lấy các điểm I, J sao cho:

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}, \qquad (1)$$

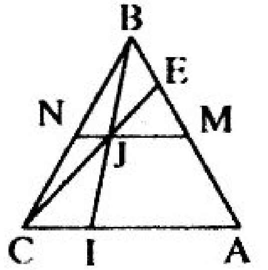
$$2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}. \qquad (2)$$

a. Chứng minh rằng M, N, J thẳng hàng, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC.

b. Chứng minh rằng J là trung điểm của BI.

c. Gọi E là điểm thuộc AB thoả mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

Giải



a. Từ (2), suy ra:

$$2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JM} + 3\overrightarrow{JN} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{M, N, J thẳng hàng.}$$

b. Từ (2), suy ra:

$$2(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IJ})+5(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IJ})+3(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IJ})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC})+5\overrightarrow{IB}-10\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ \overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \text{J là trung điểm của BI.}$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng nhận xét MJ là đường trung bình của ΔABI, do đó J là trung điểm của BI.

c. Ta có:

$$\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CI})\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$$

⟺ CJ cắt AB tại điểm E thoả mãn

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{EA}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{5}\overrightarrow{EA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k=\frac{5}{7}.$$

Chú ý:

1. Trong lời giải c) chúng ta đã sử dụng kết quả:

"Nếu $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ *thì đường thẳng MN sẽ cắt đường thẳng AB tại điểm I thoả mãn* $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$*"*.

Chúng ta sẽ minh hoạ đầy đủ vấn đề này trong bài toán "*Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định*".

2. Trong lời giải của a) và b) để chứng minh tính thẳng hàng của ba điểm ta chỉ cần sử dụng một đẳng thức vectơ, tuy nhiên tồn tại những bài toán cần sử dụng một tổ hợp đẳng thức để chứng minh, cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Cho ΔABC, lấy các điểm I, J thoả mãn:

$$\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}, \qquad (1)$$

$$3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}. \qquad (2)$$

Chứng minh rằng IJ đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Giải.

Viết lại (1) dưới dạng:

$$\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}. \qquad (3)$$

Biến đổi (2) về dạng:

$$3(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IJ})+2(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IJ})=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}=5\overrightarrow{IJ}. \qquad (4)$$

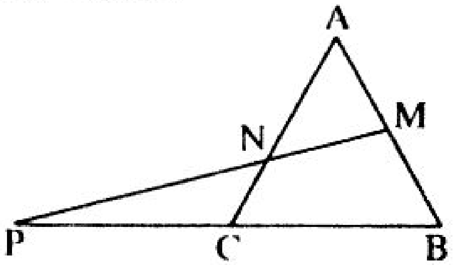
Trừ theo vế (4) cho (3), ta được:

$$2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})=5\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{IG}=5\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \text{I, J, G thẳng hàng.}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, lấy các điểm M, N, P thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0},\ 3\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0},\ \overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}.$$

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.



Giải

Chọn tổ hợp hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Khi đó:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AP}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}. \qquad (2)$$

Ta biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Từ giả thiết:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \qquad (3)$$

$$3\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}. \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}. \qquad (5)$$

Thay (3), (4), (5) vào (1) và (2), ta được:

$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-(-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}. \qquad (6)$$

$$\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-(-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}. \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra

$$\overrightarrow{PM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PN}\Leftrightarrow \text{M, N, P thẳng hàng.}$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng lập luận:

Từ giả thiết ta xác định được chính xác vị trí các điểm M, N, P trên hình vẽ và từ đó ta nhận được:

$$\frac{MB}{MA}=1,\ \frac{NA}{NC}=2 \text{ và } \frac{PC}{PB}=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA}\cdot\frac{NA}{NC}\cdot\frac{PC}{PB}=1 \overset{\text{Mêlêgauyt}}{\Leftrightarrow} \text{M, N, P thẳng hàng.}$$

Ví dụ 4: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Lấy các điểm I, J sao cho:

$$3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}. \qquad (2)$$

CMR I, J, O thẳng hàng.

Giải

Chọn tổ hợp hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI})-2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{OI}+3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{OI}+3\overrightarrow{OA}+2(-\overrightarrow{OA})-2(-\overrightarrow{OB})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}). \qquad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OJ}) - 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OJ}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 2(-\overrightarrow{OA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow \text{I, J, O thẳng hàng.}$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng lập luận:

$$(1) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in AB \\ \dfrac{IA}{IB} = 2 \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} - 2(\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{DA}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I \in AD \\ \dfrac{JD}{JA} = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{IA}{IB} \cdot \frac{OB}{OD} \cdot \frac{JD}{JA} = 1 \overset{\text{Mêlêgauyt}}{\Leftrightarrow} \text{I, J, O thẳng hàng.}$$

Chú ý: Đôi khi để tận dụng các kết quả đã biết về các đẳng thức vectơ đã biết chúng ta chọn tổ hợp gồm ba vectơ không cùng phương, cụ thể ta xét ví dụ sau:

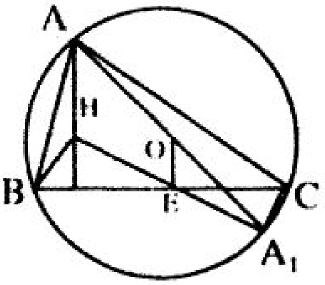
Ví dụ 5: Cho tam giác ABC. Gọi O, G, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của ΔABC. CMR O, G, H thẳng hàng.

Giải

Chọn tổ hợp hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \qquad (1)$$



Gọi E là trung điểm BC và A_1 là điểm đối xứng với A qua O, ta được:

$$\begin{cases} BH // CA_1 \text{ cùng vuông góc với AC} \\ CH // BA_1 \text{ cùng vuông góc với AB} \end{cases}$$

$\Rightarrow A_1BHC$ là hình bình hành $\Rightarrow A_1$, E, H thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OE}$

Ta có:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} \Leftrightarrow \text{O, G, H thẳng hàng.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho:

$$\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$

CMR M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 2: Cho ΔABC . Lấy các điểm M, N sao cho:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}.$$

CMR M, N, G thẳng hàng, với G là trọng tâm ΔABC.

Bài tập 3: Cho tứ giác ABCD. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k.\overrightarrow{DC}$.

a. CMR $\overrightarrow{MN} = (1 - k).\overrightarrow{AD} + k.\overrightarrow{BC}$.

b. Gọi các điểm E, F, I theo thứ tự thuộc AD, BC và MN sao cho $\overrightarrow{AE} = l.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = l.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MI} = l.\overrightarrow{MN}$. CMR E, F, I thẳng hàng.

Bài tập 4: Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự tại M, N. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC và BC. Tìm điểm P thuộc EF sao cho M, N, P thẳng hàng.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 3:

a. Từ giả thiết với điểm O bất kỳ, ta được:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}), \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OD} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}). \qquad (2)$$

Trừ theo vế (2) cho (1), ta được:

$$(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = (1 - k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}, \text{ đpcm.}$$

b. Sử dụng kết quả trong câu a), ta được:

$$\overrightarrow{EF} = (1 - l).\overrightarrow{AB} + l.\overrightarrow{DC}, \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{EI} = (1 - l)\overrightarrow{AM} + l\overrightarrow{DN} = (1 - l).k.\overrightarrow{AB} + l.k.\overrightarrow{DC}$$

$$= k[(1 - l).\overrightarrow{AB} + l.\overrightarrow{DC}]. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra:

$$\overrightarrow{EI} = k.\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \text{E, F, I thẳng hàng.}$$

Bài tập 4: Gọi P là giao điểm của EF và đường phân giác trong của góc B. Ta đi chứng minh M, N, P thẳng hàng.

BÀI TOÁN 7

CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các kết quả:

a. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Nếu có

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$$

thì đường thẳng MN sẽ cắt đường thẳng AB tại điểm I thoả mãn:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Đặc biệt khi $\alpha = \beta \neq 0$ thì I là trung điểm của AB.

b. Cho trước ba điểm A, B, C và ba số thực α, β, γ thoả mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Nếu có:

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

thì đường thẳng MN sẽ đi qua điểm cố định I thoả mãn:

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Đặc biệt khi $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ thì I là trọng tâm ΔABC.

c. Việc mở rộng cho n điểm A_i, $i = \overline{1,n}$ và bộ n số thực α_i, $i = \overline{1,n}$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, xin dành cho bạn đọc.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, N là điểm bất kì, điểm M trong mặt phẳng thoả mãn:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.

b. Gọi P là trung điểm của CN. Chứng minh rằng MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Giải

a. Với G là trọng tâm ΔABC ta luôn có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Từ giả thiết ta nhận được:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Vậy MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.

b. Vì P là trung điểm của CN nên:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})$$

Gọi J là điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$\Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm J - cố định.

Từ đó: $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}(1+1+2)\overrightarrow{MJ}=2\overrightarrow{MJ}$

Vậy MP luôn đi qua một điểm cố định J khi M thay đổi.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, N là điểm bất kì, điểm M trong mặt phẳng thoả mãn:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.$$

a. CMR MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

b. Gọi P là trung điểm của CN. CMR MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Bài tập 2: Cho tứ giác lồi ABCD, N là điểm bất kì, điểm M trong mặt phẳng thoả mãn:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}.$$

a. CMR MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

b. Gọi P là trọng tâm của ΔABN. CMR MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Gọi I là điểm thoả mãn:

$\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm I - cố định.

Từ giả thiết ta nhận được:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+5-1)\overrightarrow{MI}=5\overrightarrow{MI}.$$

Vậy MN luôn đi qua điểm cố định I khi M thay đổi.

b. Vì P là trung điểm của CN nên:

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB})$$

Gọi J là điểm thoả mãn:

$\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}=\vec{0} \Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm J - cố định.

Từ đó:

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}(1+5)\overrightarrow{MJ}=3\overrightarrow{MJ}$$

Vậy MP luôn đi qua một điểm cố định J khi M thay đổi.

BÀI TOÁN 8

NHẬN DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Xác định đặc tính K của đối tượng S khi nó thoả mãn một đẳng thức vectơ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phân tích được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Giả sử tồn tại điểm O sao cho:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| & (1) \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.

Giải

Từ (1), ta suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (3)

Gọi G là trọng tâm ΔABC , từ (2) ta được:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv O. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra ΔABC là tam giác đều.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn

$$a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} = \vec{0}. \quad (1)$$

CMR ΔABC là tam giác đều.

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$a.(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (b-a).\overrightarrow{GB} + (c-a).\overrightarrow{GC} = \vec{0}. \quad (3)$$

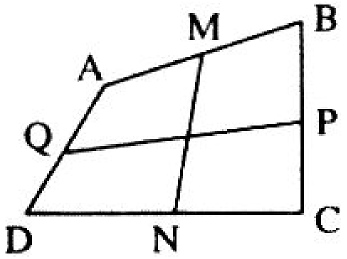
Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vectơ không cùng phương, do đó (3) tương đương với

$$\begin{cases} b-a=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, BC, AD thoả mãn

$$MN + PQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \qquad (1)$$

CMR ABCD là hình bình hành.



Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN},$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow MN \le \frac{1}{2}(AD + BC). \qquad (2)$$

Tương tự ta được: $PQ \le \frac{1}{2}(AB + CD)$. (3)

Từ (2), (3), suy ra: $MN + PQ \le \frac{1}{2}(AD + BC + AB + CD)$. (4)

Vậy (1) có được khi dấu "=" xảy ra tại (4)

$$\Leftrightarrow \text{dấu "=" xảy ra tại (2) và (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

⇔ ABCD là hình bình hành.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ giác ABCD. Giả sử tồn tại điểm O sao cho:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}| \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC, có các cạnh a, b, c. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường cao từ A, B, C. CMR ΔABC là tam giác đều nếu

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Bài tập 3: Cho tam giác ABC, có các cạnh a, b, c. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường phân giác trong kẻ từ A, B, C.

a. Tính $\overrightarrow{AA_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều nếu

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Bài tập 4: Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều nếu

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. (1)

Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA , từ (2) ta được:

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OP}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

⇔ M, P, O thẳng hàng và O là trung điểm MP. (2)

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$$

⇔ N, Q, O thẳng hàng và O là trung điểm NQ. (3)

Từ (2), (3), suy ra MNPQ là hình bình hành suy ra

- A, C, O thẳng hàng và O là trung điểm AC.
- B, D, O thẳng hàng và O là trung điểm BD.

Do đó ABCD là hình bình hành. (4)

Từ (1) và (4) suy ra ABCD là hình chữ nhật.

Bài tập 2:

a. Ta có:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b+c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

b. Tương tự câu a), ta được:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC} + \frac{a}{c+a}\overrightarrow{BA} = \frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC} - \frac{a}{c+a}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{c}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB} = -\frac{c}{a+b}\overrightarrow{AC} - \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BC}.$$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} + \frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} - \frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Vì $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ không cùng phương, nên đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{c+a} + \dfrac{c}{b+c} - \dfrac{c}{a+b} = 0 \\ \dfrac{b}{b+c} - \dfrac{a}{c+a} - \dfrac{c}{c+a} + \dfrac{b}{a+b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI TOÁN 9

ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Đẳng thức - bất đẳng thức vectơ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các tính chất:

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ luôn có:

Tính chất 1: $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$,

từ đó nếu $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ thì $|\vec{c}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Tính chất 2: $|\vec{a} - \vec{b}| \ge |\vec{a}| - |\vec{b}|$,

từ đó nếu $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ thì $|\vec{c}| \ge |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai vectơ cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ $(\vec{a}, \vec{b} \ne \vec{0})$. Hãy tìm mối liên hệ giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu có một trong hai điều kiện sau:

a. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

b. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Giải

a. Ta có:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}.$$

b. Ta có:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC và đường thẳng (d). Tìm điểm M trên (d) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}| = 3MG$$

Từ đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G lên (d).

Ví dụ 3: (IMO lần thứ 15): Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy 2n+1 điểm P_i, $i = \overline{1,2n+1}$ ở cùng một phía đối với một đường kính nào đó. CMR:

$$\left|\sum_{i=1}^{2n+1} \overrightarrow{OP_i}\right| \ge 1. \qquad (1)$$

Giải

Ta đi chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 0, (1) hiển nhiên đúng bởi khi đó $|\overrightarrow{OP_0}| = 1$.
- Giả sử (1) đúng với n = k, tức là:

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+1} \overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1. \qquad (2)$$

- Ta đi chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1, tức là cần chứng minh:

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+3} \overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1. \qquad (3)$$

Thật vậy, trong số 2k + 3 vectơ trên ta chọn hai vectơ có góc tạo bởi chúng nhỏ nhất, không mất tổng quát giả sử chúng là $\overrightarrow{OP_1}$ và $\overrightarrow{OP_{2k+3}}$.

Đặt $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{2k+3}}$.

Theo giả thiết quy nạp, ta được:

$$\overrightarrow{ON} = \sum_{i=2}^{2k+2} \overrightarrow{OP_i} \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \left|\sum_{i=2}^{2k+2} \overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1.$$

Nhận xét rằng $\overrightarrow{ON}$ nằm trong góc $\widehat{P_1OP_{2k+3}}$ do đó góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ nhọn, suy ra:

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+3} \overrightarrow{OP_i}\right| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| \geq |\overrightarrow{OM}| \geq 1.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. CMR với điểm I bất kỳ trên cạnh AB (với I khác A, B) luôn có:

$$IC.AB < IA.BC + IB.AC.$$

Bài tập 2: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có độ dài không vượt quá 1. CMR có thể tìm được hai vectơ trong chúng sao cho tổng hoặc hiệu của hai vectơ đó có độ dài không vượt quá 1.

Bài tập 3: Cho n vectơ $\overrightarrow{a_i}$, $i = \overline{1,n}$ có độ dài không vượt quá 1. CMR trong tổng $\vec{c} = \overrightarrow{a_1} \pm \overrightarrow{a_2} \pm \ldots \pm \overrightarrow{a_n}$ có thể chọn các dấu sao cho $|\vec{c}| \leq \sqrt{2}$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Giả sử $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$ thì $\overrightarrow{IB} = (1 - \alpha)\overrightarrow{AB}$ với $0 < \alpha < 1$.

Ta có:

$$IC = |\overrightarrow{CI}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}| = |\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA} + \alpha(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})|$$

$$= |(1 - \alpha)\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB}| < (1 - \alpha)CA + \alpha CB, \qquad (1)$$

bởi $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương

Vậy, từ (1) ta được:

$$IC.AB < (1 - \alpha)CA.AB + \alpha CB.AB = IB.AC + IA.BC.$$

CHỦ ĐỀ 2

TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM TRÊN TRỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Xác định toạ độ của một điểm thoả mãn các điều kiện cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cần nhớ:

- $x_M = \overline{OM}$,
- $\overline{AB} = x_A - x_B$
- Hệ thức Salơ.

Kết hợp với điều kiện cho trước để tính toạ độ của điểm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B lần lượt có toạ độ 1 và 2. Tìm điểm M thoả mãn hệ thức:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Giải

Gọi x_M là toạ độ của điểm M.

Ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(x_A - x_M) + 3(x_B - x_M) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - x_M) + 3(2 - x_M) = 0 \Leftrightarrow -5x_M + 8 = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{8}{5}.$$

Ví dụ 2: Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của AB. Tính toạ độ điểm I theo x_A, x_B.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} x_I = \overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AI} = x_A + \overline{AI} \\ x_I = \overline{OI} = \overline{OB} + \overline{BI} = x_B + \overline{BI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x_I = x_A + x_B + \overline{AI} + \overline{BI} = x_A + x_B \Leftrightarrow x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B, gọi I là điểm nằm giữa A và B thoả mãn hệ thức:

$$3IB = 2IA.$$

Tính toạ độ của I theo x_A và x_B.

Bài tập 2: Trên trục x'Ox, cho bốn điểm A, B, C, D lần lượt có toạ độ -1, 2, 1, 5. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{2}{\overline{AD}}$$

Bài tập 3: Trên trục x'Ox, cho hai điểm A và B lần lượt có toạ độ 3 và 4.

a. Tìm điểm M biết rằng: $2\,\overline{MA} + 3\,\overline{MB} = 0$

b. Tìm điểm N biết rằng: $\overline{NB} - \overline{NA} = 0$

c. Tìm điểm P đối xứng với A qua B.

Bài tập 4: Trên một trục, cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a. $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

b. $\overline{DA}^2.\overline{BC} + \overline{DB}^2.\overline{CA} + \overline{DC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$

CHỦ ĐỀ 3

HỆ TOẠ ĐỘ ĐỀCÁC VUÔNG GÓC

Cho hệ toạ độ đềcác vuông góc Oxy, ta có:

1. VECTƠ

Cho 2 điểm $M_1(x_1, y_1)$, $M_1(x_2, y_2)$ thì:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

2. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Nếu có hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ thì:

(i): $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

(ii): $\vec{v}_1 // \vec{v}_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

(iii): $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

(iv): $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

(v): $k\,\vec{v}_1(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$, $k \in R$.

(vi): $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$.

3. KHOẢNG CÁCH

Khoảng cách d giữa hai điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_1(x_2, y_2)$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}$, được cho bởi:

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

4. CHIA MỘT ĐOẠN THẲNG THEO MỘT TỈ SỐ CHO TRƯỚC:

Điểm M(x, y) chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{MM_2}$) được xác định bởi các công thức:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \end{cases}.$$

Đặc biệt nếu $k = -1$, thì M là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2, khi đó toạ độ của M được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

5. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Ba điểm $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$ thẳng hàng nếu (điều kiện cần và đủ):

$$\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

BÀI TOÁN 1

TOẠ ĐỘ VECTƠ - TOẠ ĐỘ ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Toạ độ vectơ - toạ độ điểm .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta cần nhớ các kết quả sau:

1. Với hai điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A),$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,.$$

2. Với hai vectơ $\vec{a}\,(x_1, y_1)$ và $\vec{b}\,(x_2, y_2)$, ta có:

$$\vec{a} = x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j}\,,$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases},$$

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Biểu diễn vectơ $\vec{a}$ dưới dạng:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}\,,$$

biết:

a. $\vec{a}\,(1, -1)$. b. $\vec{a}\,(5, 0)$. c. $\vec{a}\,(0, -2)$.

Giải

a. Ta được $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$.

b. Ta được $\vec{a} = 5\vec{i}$.

c. Ta được $\vec{a} = -2\vec{j}$.

Ví dụ 2: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{a}$, biết:

a. $\vec{a} = 3\vec{i}\ \vec{i}\ 4\vec{j}$.

b. $\vec{a} = \ \vec{i}\ 2\vec{i} + \frac{1}{3}\,\vec{j}$.

c. $\vec{a} = \ \vec{i}\ 4\vec{i}$

d. $\vec{a} = \vec{j}$.

Giải

a. Ta được $\vec{a}\,(3, -4)$.

b. Ta được $\vec{a}\,(-2, \frac{1}{3})$.

c. Ta được $\vec{a}\,(-4, 0)$.

d. Ta được $\vec{a}\,(0, 1)$.

Ví dụ 3: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết:

a. $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$, với $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(3, 4)$, từ đó suy ra độ dài vectơ $\vec{c}$.

b. $\vec{c} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$, với $\vec{a}(-1, 2)$, $\vec{b}(-2, -3)$.

Giải

a. Ta có: $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b} = (2, -1) + 3(3, 4) = (2 + 9, -1 + 12) = (11, 11)$,

suy ra: $|\vec{c}| = \sqrt{11^2 + 11^2} = 11\sqrt{2}$.

b. Ta có:

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 5\vec{b} = 2(-1, 2) - 5(-2, -3) = (-2 + 10, 4 + 15) = (8, 19).$$

Ví dụ 4: Cho hai điểm $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$.

a. Xác định toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

b. Tìm toạ độ điểm M sao cho $\overrightarrow{BM}(3, 0)$.

c. Tìm toạ độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA}(1, 1)$.

Giải

a. Ta có $\overrightarrow{AB}(2, 2)$ và $\overrightarrow{BA}(-2, -2)$.

b. Giả sử $M(x, y)$, khi đó:

$$\overrightarrow{BM}(x - 1, y - 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M(4, 3).$$

c. Giả sử $N(x, y)$, khi đó:

$$\overrightarrow{NA}(-1 - x, 1 - y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - x = 1 \\ 1 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N(-2, 0).$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{a}$, biết:

a. $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

b. $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$.

c. $\vec{a} = 3\vec{i}$

d. $\vec{a} = -5\vec{j}$.

Bài tập 2: Xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết:

a. $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, với $\vec{a}(1, -1)$, $\vec{b}(-2, 3)$.

☐ $\vec{c}(10, 11)$. ☐ $\vec{c}(11, 9)$. ☐ Khác.

b. $\vec{c} = -3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, với $\vec{a}(-2, 3)$, $\vec{b}(4, -1)$.

☐ $\vec{c}(8, \frac{11}{2})$. ☐ $\vec{c}(8, -\frac{19}{2})$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2:

a. $\vec{c}(10, 11)$.

b. $\vec{c}(8, -19/2)$.

BÀI TOÁN 2
BIỂU DIỄN VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chúng ta đã biết được hai phương pháp giải dạng toán này trong chủ đề 1. Bây giờ chúng ta sẽ có được phương pháp 3 được miêu tả trong bài toán sau:

Bài toán: Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}(c_1, c_2)$ theo các vectơ $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (1)$$

Bước 2: Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2) = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2).$$

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 \end{cases}. \qquad (I)$$

Giải hệ (I), ta nhận được giá trị của cặp (α, β)

Bước 3: Kết luận.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, biết:

a. $\vec{a}(2, -1)$, $\vec{b}(-3, 4)$ và $\vec{c}(-4, 7)$.

b. $\vec{a}(1, 1)$, $\vec{b}(2, -3)$ và $\vec{c}(-1, 3)$.

Giải

a. Giả sử:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (1)$$

Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(2, -1) + \beta(-3, 4) = (2\alpha - 3\beta, -\alpha + 4\beta).$$

Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -4 = 2\alpha - 3\beta \\ 7 = -\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

b. Giả sử:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \qquad (2)$$

Ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(1, 1) + \beta(2, -3) = (\alpha + 2\beta, \alpha - 3\beta).$$

Khi đó (2) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} -1 = \alpha + 2\beta \\ 3 = \alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{5} \\ \beta = -\dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Vậy $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$.

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A(1, 1), B(2, −1), C(4, 3) và D(16, 3). Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Giải

Giả sử:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AD}(15, 2),\ \overrightarrow{AB}(1, -2),\ \overrightarrow{AC}(3, 2)$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \alpha(1, -2) + \beta(3, 2) = (\alpha + 3\beta, -2\alpha + 2\beta)$$

Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 15 \\ -2\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, biết:

a. $\vec{a}(-4, 3)$, $\vec{b}(-2, -1)$ và $\vec{c}(0, 5)$.

☐ $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$. ☐ $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. ☐ Khác.

b. $\vec{a}(4, 2)$, $\vec{b}(5, 3)$ và $\vec{c}(2, 0)$.

☐ $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. ☐ $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho bốn điểm A(0, 1), B(2, 0), C(−1, 2) và D(6, −4). Tìm cặp số α, β, biết rằng:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

☐ α = 1 và β = −3. ☐ α = 3 và β = 1. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

b. $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Bài tập 2: α = 1 và β = −3.

BÀI TOÁN 3

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ MÃN MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ, ĐỘ DÀI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Xác định điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ, độ dài.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử M(x, y).

Bước 2: Toạ độ hoá các vectơ có trong đẳng thức hoặc sử dụng công thức về khoảng cách giữa hai điểm để chuyển đẳng thức về biểu thức đại số.

Bước 3: Giải phương trình hoặc hệ trên, ta nhận được toạ độ của M.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết $A(1, 0)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 3)$.

a. Xác định toạ độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$.

b. Xác định toạ độ điểm F sao cho $AF = CF = 5$.

c. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$|2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|. \qquad (1)$$

Giải

a. Giả sử E(x, y), khi đó:

$$\overrightarrow{AE}(x - 1, y),\ \overrightarrow{BC}(3, 8)$$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2.3 \\ y = 2.8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow E(7, 16).$$

b. Giả sử F(x, y), khi đó:

$$AF = CF = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} AF^2 = 25 \\ CF^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y - 3)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 25 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 - 30y = 0 \\ x = 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3 \end{array}\right. \\ x = 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4\ \&\ y = 0 \\ x = 5\ \&\ y = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_1(-4, 0) \\ F_2(5, 3) \end{array}\right..$$

Vậy tồn tại hai điểm $F_1(-4, 0)$ và $F_2(5, 3)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Giả sử M(x, y), khi đó:

$$\overrightarrow{MA}(1 - x, -y),\ \overrightarrow{MB}(-3 - x, -5 - y),\ \overrightarrow{MC}(-x, 3 - y)$$

$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC} = (-x - 4, -y - 19) \text{ và } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (-3, -8).$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (-x - 4)^2 + (-y - 19)^2 = (-3)^2 + (-8)^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y + 19)^2 = 73.$$

Đặt $I(-4, -19)$, ta được:

$IM^2 = 73 \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm $I(-4, -19)$, bán kính $R = \sqrt{73}$.

Nhận xét: Như vậy trong ví dụ trên chúng ta đã thực hiện việc xác định điểm dựa trên các đẳng thức về vectơ, độ dài cho trước. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta cần thiết lập các đẳng thức đó dựa trên tính chất của điểm cần xác định. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Cho ΔABC, biết $A(-1,3)$, $B(2,4)$, $C(0,1)$. Tìm toạ độ:

a. Trọng tâm G của ΔABC.

b. Vectơ trung tuyến $\overrightarrow{AA_1}$.

c. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d. Điểm D, sao cho ABCD là hình bình hành.

Giải

a. Giả sử $G(x, y)$, khi đó ta biết rằng:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (-1 - x, 3 - y) + (2 - x, 4 - y) + (-x, 1 - y) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (-1 - x + 2 - x - x, 3 - y + 4 - y + 1 - y) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3x, 8 - 3y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x = 0 \\ 8 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{8}{3} \end{cases}.$$

Vậy toạ độ $G(\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$.

Chú ý: Ta có được kết quả tổng quát sau:

"Cho ΔABC, biết $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, khi đó trọng tâm G của ΔABC có toạ độ:

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)."$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}[(3, 1) + (1, -2)] = \frac{1}{2}(4, -1) = (2, -\frac{1}{2}).$$

Cách 2: Vì A_1 là trung điểm BC nên $A_1(1, \frac{5}{2})$, suy ra:

$$\overrightarrow{AA_1} = (2, -\frac{1}{2}).$$

Cách 3: Ta có:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) = (2, -\frac{1}{2}).$$

c. Giả sử $I(x, y)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Leftrightarrow AI = BI = CI \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-4)^2\\(x+1)^2+(y-3)^2=x^2+(y-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{11}{14}\\y=\dfrac{37}{14}\end{cases}.$$

Vậy $I(\frac{11}{14}, \frac{37}{14})$.

d. Giả sử D(x, y), khi đó để ABCD là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x+1, y-3)=(-2, -3) \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=-2\\y-3=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=0\end{cases}.$$

Vậy toạ độ D(−3, 0).

Ví dụ 3: (ĐH Bách Khoa - 1991) : Cho điểm M(1 + 2t, 1 + 3t). Tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Giải

Ta có:

$$x_M^2 + y_M^2 = (1+2t)^2 + (1+3t)^2 = 13t^2 + 10t + 2 = 13(t + \frac{5}{13}) + \frac{1}{13} \geq \frac{1}{13}.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = \frac{1}{13}$ đạt được khi:

$$t = -\frac{5}{13} \Rightarrow M(\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}).$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết A(4, 6), B(1, 4), $C(7, \frac{3}{2})$.

a. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông.

b. Tìm toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $I(\frac{11}{4}, 4)$. ☐ $I(4, \frac{11}{4})$. ☐ Khác.

c. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết A(1, −2), B(0, 4), C(3, 2). Tìm toạ độ của:

a. Trọng tâm G của ΔABC.

☐ $G(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$. ☐ G(4/3, 4/3). ☐ Khác.

b. Vectơ trung tuyến $\overrightarrow{AA_1}$.

☐ $\overrightarrow{AA_1}(2, 5)$. ☐ $\overrightarrow{AA_1}(\frac{1}{2}, 5)$. ☐ Khác.

c. Điểm D, sao cho ABCD là hình bình hành.

☐ D(4, −4). ☐ D(4, 4). ☐ Khác.

d. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $I(\frac{1}{8}, \frac{15}{16})$. ☐ $I(\frac{15}{16}, \frac{1}{8})$. ☐ Khác.

e. Điểm M biết $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

☐ M(5, 2). ☐ M(−5, 2). ☐ Khác.

f. Điểm N biết $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$

☐ N(11, 2). ☐ N(1, −2). ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, biết A(−3, 6), B(1, −2), C(6, 3). Tìm tọa độ của:

a. Trọng tâm G của ΔABC.

☐ $G(\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$. ☐ $G(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$. ☐ Khác.

b. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ I(−1, 3). ☐ I(1, 3). ☐ Khác.

c. Điểm M biết $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$.

☐ M(2, 7). ☐ M(20, 5). ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ba điểm A(0, 3), B(4, 6), C(3, 3).

a. Xác định toạ độ điểm D, sao cho ABCD là hình bình hành.

☐ D(1, 0). ☐ D(−1, 0). ☐ Khác.

b. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB, BD sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{DB} = (k + 1)\overrightarrow{NB}$, với $k \in N^*$. CMR đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi k thay đổi.

Bài tập 5: Cho điểm A(3, 1).

a. Tìm toạ độ điểm B và C sao cho OABC là hình vuông và điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất.

b. Viết phương trình hai đường chéo và tâm của hình vuông.

Bài tập 6: Cho điểm M(1 − 2t, 1 + t). Tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Ta có

$$AB^2 = 13, BC^2 = \frac{169}{4}, CA^2 = \frac{117}{4} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

⇔ ΔABC vuông tại A.

b. Khi đó I là trung điểm BC nên $I(4, \frac{11}{4})$.

Bài tập 2:

a. $G(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. c. D(4, −4). c. M(−5, 2).

b. $\overrightarrow{AA_1}(\frac{1}{2}, 5)$. d. $I(\frac{1}{8}, \frac{15}{16})$. f. N(11, 2).

Bài tập 3:

a. $G(\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

b. $I(1, 3)$.

c. $M(20, 5)$.

Bài tập 4: $D(-1, 0)$.

Bài tập 5: Hướng dẫn

Giả sử $B(x_B, y_B)$, $x_B, y_B > 0$, $C(x_C, y_C)$.

Khi đó OABC là hình vuông:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OA = AB \\ OB = OA\sqrt{2} \\ OA = OC \\ AC = OA\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OA^2 = AB^2 \\ OB^2 = 2OA^2 \\ OA^2 = OC^2 \\ AC^2 = 2OA^2 \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ B, C.}$$

Bài tập 6: Ta có:

$$x_M^2 + y_M^2 = (1-2t)^2 + (1+t)^2 = 5t^2 - 2t + 2 \geq \frac{9}{5}.$$

Vậy $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = \frac{9}{5}$ đạt được khi:

$$t = \frac{1}{5} \Rightarrow M(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}).$$

BÀI TOÁN 4

VECTƠ CÙNG PHƯƠNG
BA ĐIỂM THẲNG HÀNG - ĐỊNH LÝ MENELAUS

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Vectơ cùng phương - Ba điểm thẳng hàng - Định lý Menelaus

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cần nhớ các kết quả sau:

a. Với hai vectơ $\vec{v}_1(x_1, y_1)$ và $\vec{v}_2(x_2, y_2)$ ta có:

$$\vec{v}_1 // \vec{v}_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

b. Cho ba điểm $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$, ta có:

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}.$$

c. ***Định lý Menelaus***

Lấy ba điểm M, N, P theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm A(0, 4), B(3, 2).

a. CMR A, B, C thẳng hàng, biết rằng $C(-6 - 3t, 8+2t)$.

b. CMR A, B, D không thẳng hàng, biết rằng D(3, 0), từ đó tính chu vi ΔABD.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}(3, -2) \text{ và } \overrightarrow{AC}(-6 - 3t, 4 + 2t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = -(2 + t)\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A, B, C \text{ thẳng hàng.}$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{AD}(3, -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AD} \text{ không cùng phương}$$

$$\Leftrightarrow A, B, C \text{ không thẳng hàng.}$$

Khi đó:

$$CV_{\Delta ABD} = AB + AD + DB = \sqrt{9+4} + \sqrt{9+16} + \sqrt{4} = 7 + \sqrt{13}.$$

Ví dụ 2: Cho hai điểm A(2, 1) và B(6, −1). Tìm toạ độ:

a. Điểm $M \in Ox$ sao cho A, B, M thẳng hàng.

b. Điểm $N \in Oy$ sao cho A, B, N thẳng hàng.

c. Điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 2\sqrt{5}$.

Giải

a. Vì $M \in Ox$ nên giả sử M(x, 0), khi đó:

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(4, -2) // \overrightarrow{AM}(x-2, -1)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x-2} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy M(4, 0).

b. Vì $N \in Oy$ nên giả sử N(0, y), khi đó:

A, B, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(4, -2) // \overrightarrow{AN}(-2, y-1)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{-2} = \frac{-2}{y-1} \Leftrightarrow y = 2.$$

Vậy N(0, 2).

c. Giả sử P(x, y), khi đó từ giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(4,-2) // \overrightarrow{AP}(x-2, y-1) \\ AP = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x-2} = -\dfrac{2}{y-1} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ (4-2y-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(6,-1) \text{ loại} \\ P(-2,3) \end{array}\right. .$$

Vậy P(−2,3).

Ví dụ 3: (ĐH Ngoại ngữ -97): Cho ba điểm A(1, 1); B(3, 3); C(2, 0).

a. Tính diện tích ΔABC.

b. Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục Ox sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$AB^2 = 4 + 4 = 8,$

$BC^2 = 1 + 9 = 10,$

$CA^2 = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Vậy diện tích ΔABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \text{ (đvdt)}.$$

b. Góc ∠AMB nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \angle AMB = 0^0 \Leftrightarrow$ **A, M, B thẳng hàng** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_M - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x_M - 1}{3-1} = \frac{-1}{3-1}$$

$$\Leftrightarrow x_M = 0 \Rightarrow M \equiv O.$$

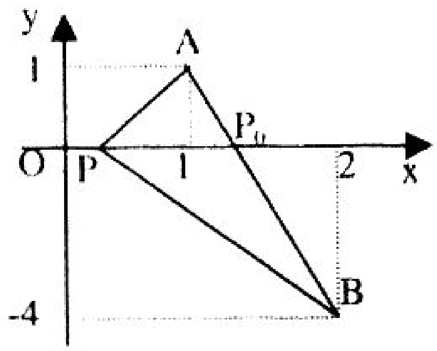
Ví dụ 4 (Đề 97-Va): Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất, biết:

a. A(1, 1) và B(2, −4).

b. A(1, 2) và B(3, 4).

Giải

a. Nhận xét A, B khác phía với Ox.



Gọi $P_0 = (AB) \cap Ox$

$\Leftrightarrow$ A, B, $P_0(x, 0)$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AP_0}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{-5}{-1} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow P_0(\frac{6}{5}, 0).$$

Ta có

$PA + PB \geq AB$.

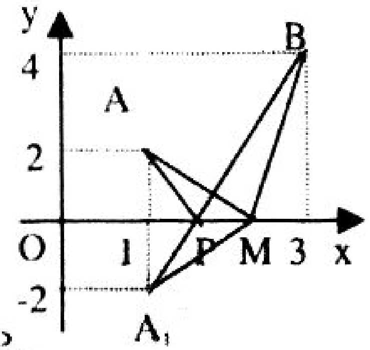
Vậy PA + PB nhỏ nhất khi và chỉ khi A, B, P thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

b. Nhận xét A, B cùng phía với Ox.

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox, suy ra $A_1(1, -2)$.

Gọi $P_0 = (A_1B) \cap Ox$

$\Leftrightarrow A_1$, B, $P_0(x, 0)$ thẳng hàng



$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1B} // \overrightarrow{A_1P_0}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow P_0(\frac{5}{3}, 0).$$

Ta có

$PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B$.

Vậy PA + PB nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_1$, B, P thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

Chú ý:

1. Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp giải cho một lớp bài toán cực trị rất quen thuộc trong các kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học và cao đẳng, do đó các em học sinh cần nắm được phương pháp giải cho bài toán tổng quát như sau:

Bài toán: *Tìm trên đường thẳng (d): Ax + By + C= 0 điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ không thuộc (d) là nhỏ nhất."*

PHƯƠNG PHÁP

Ta xác định

$t_A.t_B = (Ax_A + By_A + C)(Ax_B + By_B + C)$.

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $t_A.t_B < 0 \Leftrightarrow$ A, B ngược phía với (d).

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi $P_0 = (AB) \cap (d)$, suy ra toạ độ P_0.

Bước 2: Ta có $PA + PB \geq AB$.

Vậy PA + PB nhỏ nhất khi và chỉ khi A, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

Trường hợp 2: Nếu $t_A.t_B > 0 \Leftrightarrow$ A, B cùng phía với (d).

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d), suy ra toạ độ A_1.

Bước 2: Gọi $P_0 = (A_1B) \cap (d)$, suy ra toạ độ P_0.

Bước 3: Ta có $PA + PB = PA_1 + PB \geq AB$.

Vậy PA + PB nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_1$,P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

2. Ngoài phương pháp trên chúng ta sẽ còn nhận được một phương pháp giải khác được minh hoạ trong bài toán "*Phương pháp toạ độ hoá*".

Ví dụ 5: Cho điểm M(4, 1), hai điểm A(a, 0), B(0, b) với a, b > 0 sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định toạ độ của A, B sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

b. OA+OB nhỏ nhất.

c. $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Giải

Vì A, B, M thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \,//\, \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{4-a}{-a}=\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1. \qquad (1)$$

a. Diện tích ΔOAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{ab}{2}$.

Từ (1) suy ra

$$1=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}}=\frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab\geq 16 \Leftrightarrow S\geq 8.$$

Vậy $S_{Min}=8$, đạt được khi:

$$\frac{4}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(8,0) \\ B(0,2) \end{cases}.$$

b. Từ (1), ta được :

$$a=\frac{4b}{b-1} \Rightarrow \text{điều kiện } b>1.$$

Khi đó:

$$OA+OB=\frac{4b}{b-1}+b=\frac{4}{b-1}+b+4$$

$$=\frac{4}{b-1}+b-1+5\geq 2\sqrt{\frac{4}{b-1}.(b-1)}+5=9.$$

Vậy $(OA+OB)_{Min}=9$,

đạt được khi: $\frac{4}{b-1}=b-1=2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6,0) \\ B(0,3) \end{cases}$.

Chú ý: Sai lầm thường gặp của học sinh là dùng lập luận:

$$OA+OB=a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 8.$$

Khi đó : $(OA+OB)_{Min}=8$

đạt được khi

$$a=b \xrightarrow{(1)} a=b=5.$$

c. Ta có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

Nhận xét rằng:

$$(4^2+1^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq \left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{17}.$$

Vậy $\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\right)_{Min}=\frac{1}{17}$.

đạt được khi: $\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1\\ 4a=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{17}{4}\\ b=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A(\frac{17}{4},0)\\ B(0,17)\end{cases}$.

Ví dụ 6: (***Định lý Pascal***): Cho lục giác nội tiếp ABCDEF. CMR ba giao điểm của các cặp cạnh đối của lục giác thẳng hàng.

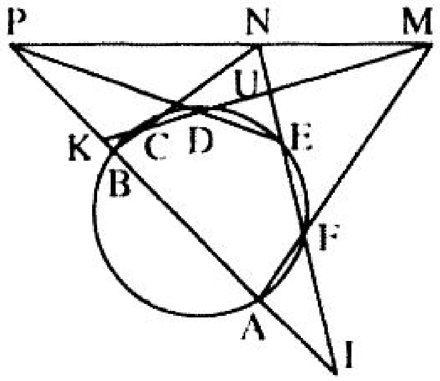
Giải

Gọi P, M, N, U, I, K theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và DE, CD và FA, CD và EF, BC và EF, AB và EF, AB và CD, ta cần chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Sử dụng kết quả của định lý Menelaus vào ΔIKU, theo ba bộ:

- Với bộ P, D, E, ta được:

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{KP}}.\frac{\overline{KD}}{\overline{UD}}.\frac{\overline{UE}}{\overline{IE}}=1.$$



- Với bộ A, M, F, ta được:

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{UM}}.\frac{\overline{UF}}{\overline{IF}}.\frac{\overline{IA}}{\overline{KA}}=1.$$

- Với bộ B, C, N, ta được:

$$\frac{\overline{UN}}{\overline{IN}}.\frac{\overline{IB}}{\overline{KB}}.\frac{\overline{KC}}{\overline{UC}}=1.$$

Suy ra: $\frac{\overline{IP}}{\overline{KP}}.\frac{\overline{KM}}{\overline{UM}}.\frac{\overline{UN}}{\overline{IN}}=\frac{\overline{UD}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{UE}}.\frac{\overline{IF}}{\overline{UF}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{UC}}{\overline{KC}}$. (1)

Mặt khác ta có: $\frac{UD.UC}{UE.UF}=\frac{IF.IE}{IA.IB}=\frac{KB.KA}{KC.KD}=1$,

do đó: $\left|\frac{\overline{UD}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{UE}}.\frac{\overline{IF}}{\overline{UF}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{UC}}{\overline{KC}}\right|=1$

Vì dấu của mỗi trong sáu nhân tử ở vế phải của (1) là âm, do đó

$$\frac{\overline{UD}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{UE}}.\frac{\overline{IF}}{\overline{UF}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{UC}}{\overline{KC}}=1.$$

Như vậy: $\frac{\overline{IP}}{\overline{KP}}.\frac{\overline{KM}}{\overline{UM}}.\frac{\overline{UN}}{\overline{IN}}=1 \Leftrightarrow$ M, N, P thẳng hàng.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai điểm A(−1, −4) và B(3, 4). Tìm toạ độ:

a. Điểm M∈Ox sao cho A, B, M thẳng hàng.

☐ M(1, 0). ☐ M(0, 1). ☐ Khác.

b. Điểm N∈Oy sao cho A, B, N thẳng hàng.

☐ N(1, 2). ☐ N(0, −2). ☐ Khác.

c. Điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và PA = $3\sqrt{5}$.

☐ P(2, 2). ☐ P(−4, −10). ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ba điểm A(1, 3); B(3, 1); C(2, 4).

a. Tính diện tích ΔABC.

b. Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục Ox sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Bài tập 3: Tìm trên trục hoành điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M tới các điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau:

a. A(1, 2) và B(3, 4).

b. A(1, 1) và B(2, −5).

Bài tập 4: Tìm trên trục tung điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M tới các điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau:

a. A(1, 1) và B(−2, −4).

b. A(1, 1) và B(3, −3).

Bài tập 5: Tìm trên đường thẳng (d): $x + y = 0$ điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M tới các điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau:

a. A(1, 1) và B(−2, −4).

b. A(1, 1) và B(3, −2).

Bài tập 6: Cho điểm M(2, 1), hai điểm A(a, 0), B(0, b) với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định toạ độ của A, B sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

b. OA + OB nhỏ nhất.

c. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài tập 7: Cho điểm M(1, 4), hai điểm A(a, 0), B(0, b) với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định toạ độ của A, B sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

b. OA+OB nhỏ nhất.

c. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Trên (d_1) lấy các điểm A, C, E và trên (d_2) lấy các điểm B, D, F sao cho các cặp đường thẳng AB và DE, CD và AF, EF và BC theo thứ tự cắt nhau tại M, N, P. CMR M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 9: (***Đường thẳng Simson***): Từ điểm E bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, hạ EM, EN, EP theo thứ tự vuông góc với các đường thẳng AB, BC, CA. CMR M, N, P thẳng hàng.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. M(1, 0).

b. N(0, −2).

c. $P_1(2, 2)$ và $P_2(-4, -10)$.

Bài tập 7: Tương tự như cách chứng minh định lý Pascal.

BÀI TOÁN 5

ĐIỂM CHIA ĐOẠN THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán : Tìm toạ độ của điểm chia toạ thẳng theo tỉ số k.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Điểm M(x, y) chia đoạn thẳng M_1M_2 theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{MM_2}$) được xác định bởi các công thức:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} \end{cases}.$$

Đặc biệt nếu k = −1, thì M là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2, khi đó toạ độ của M được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

Sử dụng các kết quả trên kết hợp với các điều kiện cho trước, ta tính được toạ độ điểm cần tìm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ba điểm A(−4, −1), B(−2, 0) và C(2, 2).

a. CMR A, B, C thẳng hàng.

b. Tìm tỉ số mà điểm B chia đoạn AC.

Giải

a. Ta có:

$\overrightarrow{BA}(-2, -1)$, $\overrightarrow{BC}(4, 2) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

b. Gọi k là tỉ số mà điểm B chia đoạn AC, ta được:

$$k = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hai điểm A(0, 2) và B(4, −3). Tìm toạ độ:

a. Trung điểm I của AB.

b. Điểm M, sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Giải

a. Ta có $I(2, -\frac{1}{2})$.

b. Từ giả thiết

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow$ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k = −2

Do đó:

$$M: \begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}).$$

Chú ý: Ta cũng có thể trình bày theo cách:

Giả sử M(x,y), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-x, 2-y) \\ \overrightarrow{MB} = (4-x, -3-y) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (8-3x, -4-3y).$$

Vì $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, nên:

$$\begin{cases} 8-3x = 0 \\ -4-3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy toạ độ của điểm $M(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$.

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết A(−1, −1), B(2, 4), C(6, 1). Lấy các điểm M, N, P trên các đường thẳng AB, CA, BC sao cho các điểm đó lần lượt chia các đoạn thẳng theo các tỉ số $-1, -\frac{1}{2}, 2$.

a. Xác định toạ độ của M, N, P.

b. Chứng tỏ rằng M, N, P thẳng hàng.

Giải

a. Ta có:

- M(x, y) chia đoạn AB theo tỉ số −1

  $\Leftrightarrow$ M là trung điểm AB $\Leftrightarrow M(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- N(x, y) chia đoạn CA theo tỉ số $\frac{1}{2}$

  $$\Leftrightarrow \overrightarrow{NC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow 2(6-x, 1-y) = -(-1-x, -1-y)$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(6-x) = 1+x \\ 2(1-y) = 1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow N(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}).$$

- P(x, y) chia đoạn BC theo tỉ số 2

  $\Leftrightarrow$ C là trung điểm BP $\Leftrightarrow$ P(10, −2).

b. Ta có:

$$\overrightarrow{MP}(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2}) \text{ và } \overrightarrow{NP}(\frac{19}{3}, -\frac{7}{3})$$

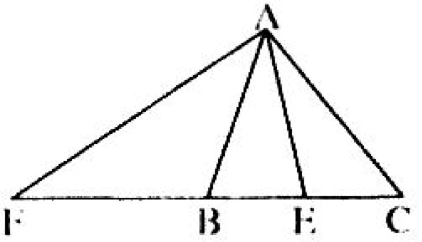
$\Rightarrow \overrightarrow{MP} // \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow$ M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 4: Cho ΔABC, biết A(1, -3), B(3, -5), C(2, -2). Tìm toạ độ:

a. Giao điểm E của BC với phân giác trong của góc A.

b. Giao điểm F của BC với phân giác ngoài của góc A.

Giải



Ta có:

$$AB^2 = 4 + 4 = 8 \text{ và } AC^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow k = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

a. Giả sử E(x, y), theo tính chất phân giác trong, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EB}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{EC}(2-x, -2-y) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}(3-x, -5-y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -\frac{1}{2}(3 - x) \\ -2 - y = -\frac{1}{2}(-5 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow E(\frac{7}{3}, -3).$$

b. Giả sử F(x, y), theo tính chất phân giác ngoài, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FB}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{FC}(2-x, -2-y) = \frac{1}{2}\overrightarrow{FB}(3-x, -5-y)$$

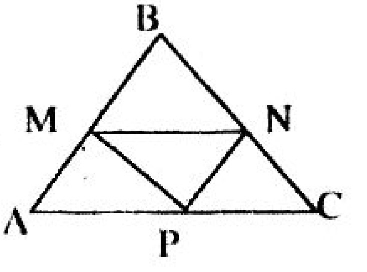
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = \frac{1}{2}(3 - x) \\ -2 - y = \frac{1}{2}(-5 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow F(1, 1).$$

Ví dụ 5: Cho ΔABC, biết $M(-\frac{5}{2}, -1)$, $N(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$, $P(0, \frac{1}{2})$ theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C.

Giải

Giả sử $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, khi đó:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M = -5 \\ y_A + y_B = 2y_M = -2 \\ x_B + x_C = 2x_N = -3 \\ y_B + y_C = 2y_N = -7 \\ x_A + x_C = 2x_P = 0 \\ y_A + y_C = 2y_P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -1 \\ y_A = 3 \\ x_B = -4 \\ y_B = -5 \\ x_C = 1 \\ y_C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-1, 3) \\ B(-4, -5). \\ C(1, -2) \end{cases}$$



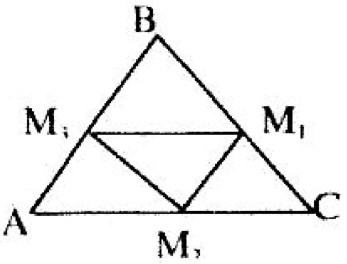
Chú ý: Ta giải bài toán trên trong trường hợp tổng quát để nhận được công thức tính, cụ thể:

"(Đại học Quốc gia Hà Nội - 1996): Cho ba điểm $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ là trung điểm theo thứ tự của các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Hãy tìm toạ độ các điểm A, B, C."

PHƯƠNG PHÁP

Giả sử $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_3 & (1) \\ y_A + y_B = 2y_3 & (2) \\ x_A + x_C = 2x_2 & (3) \\ y_A + y_C = 2y_2 & (4) \\ x_C + x_B = 2x_1 & (5) \\ y_C + y_B = 2y_1 & (6) \end{cases}$$



Thay (5) vào (1)+(3), ta được $x_A = -x_1 + x_2 + x_3$.

Thay x_A vào (1), (3), ta được : $x_B = x_1 - x_2 + x_3$ và $x_C = x_1 + x_2 - x_3$.

Thay (6) vào (2)+(4), ta được $y_A = -y_1 + y_2 + y_3$.

Thay y_A vào (2), (4), ta được : $y_B = y_1 - y_2 + y_3$ và $y_C = y_1 + y_2 - y_3$.

Vậy toạ độ ba đỉnh A, B, C của ΔABC là:

$A(-x_1 + x_2 + x_3, -y_1 + y_2 + y_3)$, $B(x_1 - x_2 + x_3, y_1 - y_2 + y_3)$, $C(x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$

Ví dụ 6: (ĐH Khối A - 2002): Cho ΔABC vuông tại A, biết $A(a, 0)$, $B(1, 0)$, $C(a, a\sqrt{3} - \sqrt{3})$. Xác định toạ độ trọng tâm G của ΔABC, biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2.

Giải

Ta có $G(\frac{2a+1}{3}, \frac{a-1}{\sqrt{3}})$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = p.r \Leftrightarrow AB.AC = 2(AB + AC + BC)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}|a-1|.|a-1| = 2(|a-1| + \sqrt{3}|a-1| + 2|a-1|)$$

$$\Leftrightarrow |a-1| = 2 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 + 2\sqrt{3} \\ a = -1 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

- Với $a = 3 + 2\sqrt{3}$, ta được: $G(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}, \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$.
- Với $a = -1 - 2\sqrt{3}$, ta được: $G(\frac{-1 - 4\sqrt{3}}{3}, \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$.

Vậy tồn tại hai điểm G thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: Cho ΔABC cân tại A, biết $A(a, 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7})$, $B(1, 0)$, $C(2a - 1, 0)$ và A thuộc góc phần tư thứ nhất.

a. Xác định toạ độ các đỉnh của ΔABC, biết rằng $p = 9$ (p là nửa chu vi).

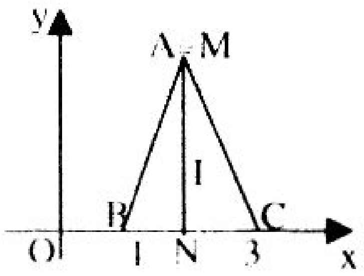
b. Tìm toạ độ điểm $M \in AB$ và $N \in BC$ sao cho đường thẳng MN đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của ΔABC.

Giải

a. Ta có toạ độ các điểm:

$A(a, 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7})$, $B(1, 0)$, $C(2a - 1, 0)$.

Từ giả thiết:



- $A \in P(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1.$
- $P = 9 \Leftrightarrow \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 9$

$\Leftrightarrow 2.8|a - 1| + 2|a - 1| = 18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 0\ (l) \end{array}\right.$

Từ đó: $A(2,\ 3\sqrt{7}),\ B(1,\ 0),\ C(3,\ 0) \Rightarrow AB = AC = 8,\ BC = 2.$

b. Ta cần tìm điểm $M \in AB$ (tức là phải tìm $x = BM,\ 0 < x < 8$) sao cho trên cạnh BC tồn tại điểm N thoả mãn:

$BN = p - x = 9 - x,\ 0 \le 9 - x \le 2 \Leftrightarrow 7 \le x \le 9,$

$$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Từ (1) ta được:

$$\frac{BM.BN}{AB.BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x(9 - x)}{8.2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 1\text{(loại)} \end{array}\right..$$

- Với $x = 8 \Rightarrow M \equiv A(2,\ 3\sqrt{7})$ và $N(2,\ 0)$ là trung điểm BC.

Chú ý: Bài toán trên có dạng tổng quát như sau:

> **Bài toán:** Cho ΔABC có các cạnh a, b, c (tương ứng với các đỉnh A, B, C và chu vi 2p), giả sử $c \le b \le a$. Tìm điểm $M \in AB$, $N \in BC$ sao cho đường thẳng MN đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của ΔABC.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Điểm $M \in AB$ (tức là phải tìm $x = BM,\ 0 < x < c$) sao cho trên cạnh BC tồn tại điểm N thoả mãn:

$BN = p - x,\ 0 \le p - x \le a,$

$$\frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Bước 2: Từ (1) ta được:

$$\frac{BM.BN}{AB.BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x(p - x)}{c.a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2px + ac = 0. \ (2)$$

Bước 3: Giải phương trình (2) ta xác định được x, từ đó suy ra toạ độ các điểm M, N.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai điểm A(1, 2) và B(3, 6). Tìm toạ độ:

a. Trung điểm I của AB.

☐ I(2, 4). ☐ I(4, 2). ☐ Khác.

b. Điểm C đối xứng với A qua B.

☐ C(−5, 1). ☐ C(5, 10). ☐ Khác.

c. Điểm M, sao cho $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

☐ M(6, 3). ☐ M(−3, −6). ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết A(0, 2), B(1, 1), C(−1, −2). Lấy các điểm M, N, P trên các đường thẳng AB, BC, CA sao cho các điểm đó lần lượt chia các đoạn thẳng theo các tỉ số −1, $\frac{1}{2}$, −2.

a. Xác định toạ độ của M, N, P.

☐ M($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$), N(3, −4), P($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$) ☐ M($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$), N(3, 4), P(−$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$)

b. Chứng tỏ rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 3: Cho ΔABC, biết M($\frac{1}{2}$, 4), N(−3, $\frac{9}{2}$), P(−$\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$) theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Xác định toạ độ các đỉnh A, B, C.

☐ A(2, 2), B(−1, 6), C(−5, 3). ☐ A(−1, 6), B(2, 2), C(−5, 3).

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết A(−1, 1), B(3, −2), C(5, 7). Tìm toạ độ:

a. Giao điểm E của BC với phân giác trong của góc A.

☐ E($\frac{11}{3}$, −$\frac{11}{3}$). ☐ E(−$\frac{11}{3}$, $\frac{11}{3}$). ☐ Khác.

b. Giao điểm F của BC với phân giác ngoài của góc A.

☐ F(3, 1). ☐ F(1, 3). ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC, biết A(-2, 3), B(2, 0), C($\frac{1}{4}$, 0). Tìm toạ độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác.

☐ I(1, $\frac{1}{2}$). ☐ I($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$). ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. I(2, 4).

b. C(5, 10).

c. M(−3, −6).

Bài tập 2: M($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$), N(3, 4), P(−$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$).

Bài tập 3: A(2, 2), B(−1, 6), C(−5, 3).

Bài tập 4: E($\frac{11}{3}$, −$\frac{11}{3}$) và F(1, 3).

Bài tập 5: I($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$).

BÀI TOÁN 6

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HOÀ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hàng điểm điều hoà.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bốn điểm $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ lập thành hàng điểm điều hoà (ký hiệu $(ABCD) = -1$)

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_A + x_B)(x_C + x_D) = 2(x_A.x_B + x_C.x_D)\\(y_A + y_B)(y_C + y_D) = 2(y_A.y_B + y_C.y_D)\end{cases}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho 3 điểm $A(0, -1)$, $B(2, 3)$, $C(\frac{1}{2}, 0)$.

a. CMR A, B, C thẳng hàng.

b. Tìm toạ độ điểm D sao cho A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{CA}\,(-\frac{1}{2}, -1),\ \overrightarrow{CB}\,(\frac{3}{2}, 3) \Rightarrow \overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \text{A, B, C thẳng hàng}$$

b. Giả sử D(x, y), khi đó bốn điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DA}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2 - x = 3(-x)\\3 - y = 3(-1 - y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\y = -3\end{cases} \Leftrightarrow D(-1, -3).$$

Vậy $D(-1, -3)$.

Ví dụ 2: (***Hệ thức Newton***): CMR 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà khi và chỉ khi với điểm I bất kì luôn có:

$$IA^2 = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}\,.$$

Áp dụng tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà, biết $A(2, 3)$, $B(\frac{1}{2}, 0)$, $C(-1, -3)$.

Giải

Ta có A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AI} + \overline{IC}}{\overline{AI} + \overline{ID}} = -\frac{\overline{BI} + \overline{IC}}{\overline{BI} + \overline{ID}} = -\frac{-\overline{AI} + \overline{IC}}{-\overline{AI} + \overline{ID}}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AI} + \overline{IC})(-\overline{AI} + \overline{ID}) = -(\overline{AI} + \overline{ID})(-\overline{AI} + \overline{IC})$$

$\Leftrightarrow IA^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$, đpcm.

Áp dụng kết quả trên ta nhận được D(0, −1) - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

Ví dụ 3: (***Hệ thức Descartes***): CMR 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà khi và chỉ khi:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Áp dụng tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà, biết A(0, −1), B(2, 3), C($\frac{1}{2}$, 0).

Giải

Ta có A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BA}+\overline{AD}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BA}+\overline{AC}}{\overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} + 1 = -\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} - 1 \Leftrightarrow 2 = \overline{AB}\left(\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}, \text{ đpcm.}$$

Áp dụng kết quả trên ta nhận được D(−1, −3) - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

Ví dụ 4: (***Hệ thức Mac Laurin***): CMR 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà khi và chỉ khi:

$\overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CD}.\overline{CI}$, với I là trung điểm của AB.

Áp dụng tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà, biết A(2, 3), B(0, −1), C(−1, −3).

Giải

Áp dụng hệ thức Descartes, ta có A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}+\overline{CA}}{\overline{CA}.\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CD}.\frac{\overline{CB}+\overline{CA}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CA}.\overline{CB} = \overline{CD}.\overline{CI}, \text{ đpcm.}$$

Áp dụng kết quả trên ta nhận được D($\frac{1}{2}$, 0) - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ba điểm A(0, −1), B(−1, −3), C($\frac{1}{2}$, 0).

a. CMR A, B, C thẳng hàng.

b. Tìm toạ độ điểm D, để 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà.

☐ D(2, 3). ☐ D(−2, 3). ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, trực tâm H, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi E, F, P theo thứ tự là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, BB_1 và A_1C_1, CC_1 và A_1B_1. CMR bộ 4 điểm sau lập thành hàng điểm điều hoà:

a. A, H, E, A_1.

b. B, H, F, B_1.

c. C, H, P, C_1.

Bài tập 3: Cho 4 điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà. CMR:

a. $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}} = 0.$

b. $AB^2 + CD^2 = 4EF^2$, với E, F theo thứ tự là trung điểm AB, CD.

Bài tập 4: (***Định lý Ceva***): Cho ΔABC. CMR điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng xuất phát từ ba đỉnh A, B, C đồng quy là các giao điểm A_1, B_1, C_1 của chúng với các cạnh đối diện thoả mãn:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: D(2, 3).

BÀI TOÁN 7

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ HOÁ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Phương pháp toạ độ hoá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp toạ độ hoá thường được sử dụng phổ biến trong hai dạng:

Dạng 1: Ta thực hiện phép toạ độ hoá các điểm trong hình và đưa bài toán hình học về dạng giải tích.

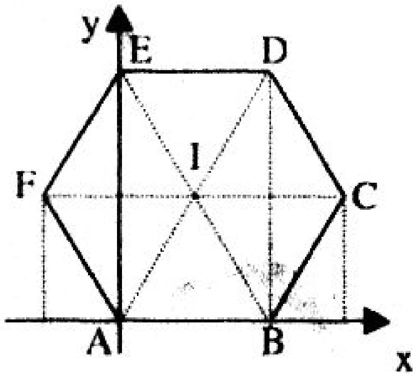
Dạng 2: Lựa chọn các điểm thích hợp để biến đổi biểu thức đại số về dạng độ dài hình học - Phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức đại số.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: (Đề 101): Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$ theo các vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ xAy, sao cho $B \in Ax$, $E \in Ay$ và giả sử $|\overrightarrow{AB}| = 1$, khi đó:



$A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$D(1, \sqrt{3})$, $E(0, \sqrt{3})$, $F(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Từ đó $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1, 0)$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AE}(0, \sqrt{3})$.

- Với $\overrightarrow{AC}(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, ta được:

$$\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \alpha \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \beta\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

- Với $\overrightarrow{AD}(1, \sqrt{3})$, ta được:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ \sqrt{3} = \beta\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

Do đó $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$.

- Với $\overrightarrow{AF}(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, ta được:

$$\overrightarrow{AF} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} = \alpha \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \beta\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Do đó $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

- Với $\overrightarrow{EF}(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, ta được:

$$\overrightarrow{EF} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} = \alpha \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \beta\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

Chú ý: Đương nhiên ví dụ trên chỉ mang tính minh hoạ, bởi trong trường hợp tổng quát rất khó có thể thiết lập được hệ toạ độ thích hợp. Như vậy ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp phân tích vectơ thuần tuý như sau:

Gọi I là tâm hình lục giác (suy ra I là trung điểm BE), khi đó:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}. = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 40}.$$

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{(x+1)^2 + 2^2} + \sqrt{(x-2)^2 + 6^2}$$

Xét các điểm A(−1, 2), B(2, 6) và M(x, 0), khi đó:

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + 2^2},$$

$$BM = \sqrt{(x-2)^2 + 6^2},$$

suy ra:

$$y = AM + BM \ge AB = 5$$

Vậy $y_{Min} = 5$, đạt được khi

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$.

Chú ý: Đôi khi dạng toán này được minh hoạ dưới dạng trị tuyệt đối, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = |x+1|.\sqrt{5} + \sqrt{5x^2 - 14x + 13}.$$

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{5(x+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (2x-2)^2}$$

$$= \sqrt{(x+1)^2 + (2x+2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (2x-2)^2}.$$

Xét các điểm $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ và $M(x, 2x)$, khi đó:

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (2x+2)^2},$$

$$BM = \sqrt{(x-3)^2 + (2x-2)^2},$$

suy ra:

$$y = AM + BM \geq AB = 4\sqrt{2}$$

Vậy $y_{Min} = 4\sqrt{2}$, đạt được khi

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{2x+2}{4} \Leftrightarrow x = -1.$$

Chú ý: Với các bài toán có tham số các em học sinh chỉ cần khéo léo biến đổi đôi chút, để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2},$$

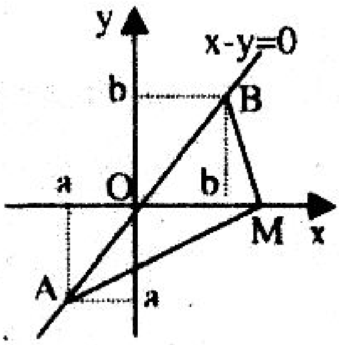
với a, b là các hằng số thoả mãn $a < 0$ và $b > 0$.

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{(x-a)^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + b^2}$$

Xét ba điểm $A(a, a)$, $B(b, b)$ và $M(x, 0)$, ta có:



$$MA = \sqrt{(x-a)^2 + a^2},$$

$$MB = \sqrt{(x-b)^2 + b^2},$$

suy ra:

$$y = \sqrt{(x-a)^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + b^2}$$

$$= MA + MB \geq AB = \sqrt{2(a-b)^2} = \sqrt{2}\,(b-a)$$

Vậy $y_{Min} = \sqrt{2}\,(b-a)$, đạt được khi

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow$ M≡O.

Chú ý: Phương pháp trên đương nhiên được mở rộng cho trường hợp biểu thức hai biến x, y. Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}.$$

Giải

Viết lại biểu thức dưới dạng:

$$S = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}.$$

Xét các điểm A(-1, 2), B(3, 2) và M(x, y), khi đó:

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$

$$BM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2},$$

suy ra:

$$S = AM + BM \geq AB = 4$$

Vậy $S_{Min} = 4$, đạt được khi

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{0} \Leftrightarrow y = 2,$$

và khi đó:

$$S = |x+1| + |x-3| = |x+1| + |3-x| \geq |x+1+3-x| = 4,$$

dấu "=" xảy ra khi

$$(x+1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Vậy $S_{Min} = 4$, đạt được khi:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Chú ý: Phương pháp trên còn được mở rộng cho bài toán tổng khoảng cách ngắn nhất. Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 6: Cho ba điểm A(1, 2), B(0, −1) và M(t, 2t + 1). Tìm điểm M thuộc (d) sao cho:

a. MA + MB nhỏ nhất.

b. |MA − MB| lớn nhất.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{aligned} MA+MB &= \sqrt{(t-1)^2 + (2t-1)^2} + \sqrt{t^2 + (2t+2)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 6t + 2} + \sqrt{5t^2 + 8t + 4} \\ &= \sqrt{5}\,[\sqrt{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}} + \sqrt{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}}\,] \end{aligned}$$

Xét các điểm $A_1(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$; $B_1(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ và $M_1(t, 0)$.

Khi đó:

$$MA + MB = \sqrt{5}\,(M_1A_1 + M_1B_1).$$

Vì M_1 chạy trên trục hoành và A_1, B_1 nằm về hai phía của Ox nên

$(MA + MB)_{min}$

$\Leftrightarrow (M_1A_1 + M_1B_1)_{min}$

$\Leftrightarrow M_1 = (A_1B_1) \cap Ox$

$\Leftrightarrow M_1(\frac{2}{15}, 0) \Leftrightarrow M(\frac{2}{15}, \frac{19}{15})$

b. Tương tự câu a) ta có:

$$|MA - MB| = \sqrt{5}\left|\sqrt{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}} - \sqrt{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}}\right|$$

Xét các điểm $A_2(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$; $B_2(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ và $M_2(t, 0)$.

Khi đó:

$|MA - MB| = \sqrt{5}\,|M_2A_2 - M_2B_2|$.

Vì M_2 chạy trên trục hoành và A_2, B_2 nằm về một phía của Ox nên

$|MA - MB|_{max}$

$\Leftrightarrow |M_2A_2 - M_2B_2|_{max}$

$\Leftrightarrow M_2=(A_2B_2) \cap Ox$

$\Leftrightarrow M_2(2, 0) \Leftrightarrow M(2, 5)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

b. $y = \sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

c. $y = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$, với $a, b \in R$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 2} + \sqrt{\cos^2\alpha + 6\cos\alpha + 13}.$$

Bài tập 3: Cho ba điểm A(0, 6), B(2, 5) và M(2t − 2, t). Tìm toạ độ điểm M sao cho:

a. MA + MB nhỏ nhất.

b. |MA − MB| lớn nhất.

Bài tập 4: Cho ba điểm A(1, 2), B(2, 5) và M(2t + 2, t). Tìm toạ độ điểm M sao cho:

a. MA+MB nhỏ nhất.

b. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

c. |MA − MB| nhỏ nhất.

d. |MA-MB| lớn nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Xét các điểm $A(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ và $M(x, 0)$, khi đó:

$$AM=\sqrt{x^2+x+1}\,.$$

$$BM=\sqrt{x^2-x+1}\,.$$

suy ra:

$$y = AM + BM \geq AB = 1$$

Vậy $y_{Min}=1$, đạt được khi

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,//\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ toạ độ của M.

Chú ý: Với các em học sinh chưa có kinh nghiệm giải dạng toán này thông thường sẽ chọn ngay $A(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $M(x, 0)$ và vẫn nhận được $y_{Min}=1$, tuy nhiên khi đó điều kiện cho A, B, M thẳng hàng sẽ vô nghiệm.

Rút kinh nghiệm từ trên đề nghị bạn đọc tự giải câu b), c).

Bài tập 2: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y=\sqrt{1+(1-\cos\alpha)^2}+\sqrt{4+(3+\cos\alpha)^2}$$

Xét các điểm $M(1, 1-\cos\alpha)$ và $N(3, 4)$, ta có:

$$OM=\sqrt{1+(1-\cos\alpha)^2} \text{ và } MN=\sqrt{4+(3+\cos\alpha)^2}$$

Khi đó:

$$y = OM + MN \geq ON = 5$$

Vậy $y_{min}=5$, dấu "=" xảy ra khi

M, N, O thẳng hàng $\Leftrightarrow 1+3\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{3}$.

Để tìm y_{max} - *Đề nghị bạn đọc tự làm (Đáp số:* $y_{max}=1+\sqrt{20}$ *).*

CHƯƠNG II
HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

CHỦ ĐỀ 1
TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC BẤT KỲ

1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

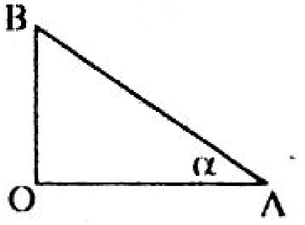
Cho ΔOAB vuông tại O, $\widehat{OAB} = \alpha$ ta có:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OB}{AB}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OA}{AB}.$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{OB}{OA}.$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \frac{OA}{OB}.$$



2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

Độ đo / Hàm	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotgα	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$

3. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Ta có các kết quả sau:

Độ đo / Hàm số lượng giác	$0 < \alpha < 90^0$	$90^0 < \alpha < 180^0$
cosα	+	-
sinα	+	+
tgα	+	-
cotgα	+	-

4. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

b. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ và $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

c. $\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\alpha = 1$.

d. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$ và $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha$.

5. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

b. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.

c. $\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.

d. $\mathrm{cotg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$.

6. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$.

b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

c. $\mathrm{tg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$.

d. $\mathrm{cotg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$.

7. SỰ BIẾN THIÊN CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

a. Với hàm số $y = \sin x$ trên $[0, 180^0]$, ta có:

- Hàm số nhận giá trị dương và đồng biến trên $[0, 90^0]$.
- Hàm số nhận giá trị dương và nghịch biến trên $[90^0, 180^0]$.

b. Với hàm số $y = \cos x$ trên $[0, 180^0]$, ta có:

Hàm số nghịch biến trên $[0, 180^0]$.

c. Với hàm số $y = \mathrm{tg}x$ trên $[0, 180^0]\backslash\{90^0\}$, ta có:

- Hàm số nhận giá trị dương và đồng biến trên $[0^0, 90^0)$.
- Hàm số nhận giá trị âm và đồng biến trên $(90^0, 180^0]$.

d. Với hàm số $y = \mathrm{cotg}x$ trên $(0^0, 180^0)$, ta có:

Hàm số nghịch biến trên $(0^0, 180^0)$.

BÀI TOÁN 1
TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC CHỨA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa các cung đặc biệt

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hệ quả trong bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 4 - \sin^2 45^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\text{cotg}^3 45^0$.

b. $B = \text{tg}45^0.\cos 30^0.\text{cotg}30^0$.

Giải

a. Ta có:

$$A = 4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = 1.$$

b. Ta có:

$$B = 1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 3a.\cos 0^0 + b.\sin 90^0 + a.\cos 180^0$.

b. $B = 4a^2.\sin^2 45^0 - 3(a.\text{tg}45^0)^2 + (2a.\cos 45^0)^2$.

Giải

a. Ta có:

$$A = 3a + b - a = 2a + b.$$

b. Ta có:

$$B = 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2 + 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 4\sin^4 135^0 + \sqrt{3}\cos^3 150^0 - 3\text{cotg}^2 120^0.$$

Giải

Ta có:

$$A = 4.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{9}{8}.$$

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^2.\sin 180^0 - b^3\sqrt{2}.\sin 135^0 - 2ab^2.\cos 150^0}{a.\text{cotg}150^0 - b.\cos 0^0 + 2a\text{tg}60^0}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{-b^3\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + 2ab^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{-a\sqrt{3} - b + 2a\sqrt{3}} = \frac{-b^3 + ab^2\sqrt{3}}{a\sqrt{3} - b} = \frac{b^2(a\sqrt{3} - b)}{a\sqrt{3} - b} = b^2.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 8 - \cos^2 30^0 + 2\sin^2 45^0 - \sqrt{3}\,\text{tg}^3 60^0.$$

☐ $A = \frac{3}{4}$. ☐ $A = -\frac{3}{4}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = (a^2 + 1).\sin 0^0 + b.\cos 90^0 + c.\cos 180^0.$$

☐ $A = c$. ☐ $A = b + c$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 4\cos^4 135^0 - 8\sin^3 150^0 - 3(\text{tg}^2 120^0 - \text{tg}^4 135^0).$$

☐ $A = -8$. ☐ $A = -6$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^2 \sin 90^0 - b^2 \cos 0^0}{a.\cot g 45^0 + b.\cos 180^0 - 2a.\cot g 90^0}.$$

☐ $A = a - b$. ☐ $A = a + b$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $A = -\frac{3}{4}$.

Bài tập 2: $A = c$.

Bài tập 3: $A = -6$.

Bài tập 4: $A = a + b$.

BÀI TOÁN 2

SO SÁNH GIÁ TRỊ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: So sánh giá trị của các hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng:

1. Dấu của các giá trị lượng giác.
2. Sự biến thiên của các hàm số lượng giác.
3. Phần tử trung gian.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 63^0$ và $\sin 72^0 15'$.

b. $\sin 142^0 20'$ và $\sin 154^0 10'$.

c. $\sin 51^0 18'$ và $\sin 137^0 12'$.

Giải

a. Ta có $0^0 < 63^0 < 72^0 15' < 90^0$ và miền này hàm số sinx đồng biến, do đó:

$\sin 63^0 < \sin 72^0 15'$.

b. Ta có $90^0 < 142^0 20' < 154^0 10' < 180^0$ và miền này hàm số sinx nghịch biến, do đó:

$\sin 142^0 20' > \sin 154^0 10'$.

c. Ta có:

- $0^0 < 45^0 < 51^0 18' < 90^0$ và miền này hàm số sinx đồng biến, do đó:

$$\sin 51^0 18' > \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

- $90^0 < 135^0 < 137^0 12' < 180^0$ và miền này hàm số sinx nghịch biến, do đó:

$$\sin 137^0 12' < \sin 135^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sin 51^0 18' > \sin 137^0 12'$.

Ví dụ 2: So sánh các cặp số sau:

a. $\cos 13^0$ và $\cos 69^0$.

b. $\cos 92^0 12'$ và $\sin 11^0$.

c. $\cos 27^0$ và $\sin 59^0$.

Giải

a. Ta có hàm số cosx nghịch biến trên $[0^0, 180^0]$, do đó:

$\cos 13^0 > \cos 69^0$.

b. Ta có:

$$\begin{cases} \cos 92^0 12' < 0 \\ \sin 11^0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos 92^0 12' < \sin 11^0.$$

c. Ta có:

$$\begin{cases} \cos 27^0 > \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 59^0 < \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos 27^0 > \sin 59^0.$$

Nhận xét: Ta thấy ngay để thực hiện phép so sánh trong:

a. Câu c) của ví dụ 1 ta đã sử dụng phần tử trung gian là $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. Câu c) của ví dụ 2 ta đã sử dụng phần tử trung gian là $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

tuy nhiên với một thay đổi nhỏ, như cặp $\sin 51^0 18'$ và $\sin 132^0 12'$ hoặc $\cos 27^0$ và $\sin 61^0$ ta không thể sử dụng phần tử trung gian được, xong điều này sẽ được khắc phục trong phần "Hàm lượng giác của hai góc phụ, bù nhau".

Ví dụ 3: So sánh các cặp số sau:

a. $\text{tg}13^0$ và $\text{tg}37^0$.

b. $\text{tg}92^0 12'$ và $\text{tg}111^0$.

c. $\text{tg}47^0$ và $\text{tg}93^0$.

Giải

a. Ta có $0^0 < 13^0 < 37^0 < 90^0$ và miền này hàm số tgx đồng biến, do đó:

$\text{tg}13^0 < \text{tg}37^0$.

b. Ta có $90^0 < 92^0 12' < 111^0 < 180^0$ và miền này hàm số tgx đồng biến, do đó:

$\text{tg}92^0 12' < \text{tg}111^0$.

c. Ta có:

$$\begin{cases} \text{tg}47^0 > 0 \\ \text{tg}93^0 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{tg}47^0 > \text{tg}93^0.$$

Ví dụ 4: So sánh các cặp số sau:

a. $\text{cotg}36^0$ và $\text{cotg}129^0$.

b. $\text{cotg}92^0 2'$ và $\text{tg}133^0$.

c. $\text{cotg}46^0$ và $\sin\alpha$.

Giải

a. Ta có hàm số cotgx nghịch biến trên $(0^0, 180^0)$, do đó:

$\text{cotg}36^0 > \text{cotg}129^0$.

b. Ta có:

$$\begin{cases} \text{cotg}92^0 2' > -1 \\ \text{tg}133^0 < -1 \end{cases} \Rightarrow \text{cotg}92^0 2' > \text{tg}133^0.$$

c. Ta có:

$$\begin{cases} \text{cotg}46^0 > 1 \\ \sin\alpha \le 1 \end{cases} \Rightarrow \text{cotg}46^0 > \sin\alpha.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 56^0$ và $\sin 71^0 13'$.

☐ $\sin 56^0 < \sin 71^0 13'$. ☐ $\sin 56^0 > \sin 71^0 13'$.

b. $\sin 132^0 21'$ và $\sin 144^0 11'$.

☐ $\sin 132^0 21' < \sin 144^0 11'$. ☐ $\sin 132^0 21' > \sin 144^0 11'$.

c. $\sin 31^0 18'$ và $\sin 132^0 1'$.

☐ $\sin 31^0 18' < \sin 132^0 1'$. ☐ $\sin 31^0 18' > \sin 132^0 1'$.

Bài tập 2: So sánh các cặp số sau:

a. $\cos 113^0$ và $\cos 39^0$.

☐ $\cos 113^0 > \cos 39^0$. ☐ $\cos 113^0 < \cos 39^0$.

b. $\cos 102^0$ và $\sin 111^0$.

☐ $\cos 102^0 > \sin 111^0$. ☐ $\cos 102^0 < \sin 111^0$.

c. $\cos 47^0$ và $\sin 46^0$.

☐ $\cos 47^0 < \sin 46^0$. ☐ $\cos 47^0 > \sin 46^0$.

Bài tập 3: So sánh các cặp số sau:

a. $\mathrm{tg}133^0$ và $\mathrm{tg}145^0$.

☐ $\mathrm{tg}133^0 < \mathrm{tg}145^0$. ☐ $\mathrm{tg}133^0 > \mathrm{tg}145^0$.

b. $\mathrm{cotg}41^0$ và $\mathrm{cotg}33^0 23'$.

☐ $\mathrm{cotg}41^0 < \mathrm{cotg}33^0 23'$. ☐ $\mathrm{cotg}41^0 > \mathrm{cotg}33^0 23'$.

c. $\mathrm{tg}46^0$ và $\mathrm{cotg}47^0$.

☐ $\mathrm{tg}46^0 < \mathrm{cotg}47^0$. ☐ $\mathrm{tg}46^0 > \mathrm{cotg}47^0$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 56^0 < \sin 71^0 13'$.

b. $\sin 132^0 21' > \sin 144^0 11'$.

c. $\sin 31^0 18' < \sin 132^0 1'$.

Bài tập 2: So sánh các cặp số sau:

a. $\cos 113^0 < \cos 39^0$.

b. $\cos 102^0 < \sin 111^0$.

c. $\cos 47^0 < \sin 46^0$.

Bài tập 3: So sánh các cặp số sau:

a. $\mathrm{tg}133^0 < \mathrm{tg}145^0$.

b. $\mathrm{cotg}41^0 < \mathrm{cotg}33^0 23'$.

c. $\mathrm{tg}46^0 > \mathrm{cotg}47^0$.

BÀI TOÁN 3

RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Rút gọn biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác.

Cần lưu ý rằng việc rút gọn biểu thức trong nhiều trường hợp là công việc cần thiết nhất trước khi thực hiện việc tính giá trị của biểu thức.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\alpha.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \mathrm{cotg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1 - \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\right].$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1 - \frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}\right] = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1 - \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right]$$

$$= \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = 2\mathrm{tg}\alpha.$$

Chú ý:

1. Thông qua hai ví dụ trên ta có tổng kết ban đầu: nếu bài toán trên được phát biểu dưới dạng:

"Cho $\mathrm{tg}\alpha = m$, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1 - \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\right]."$$

Khi đó với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thực hiện bài toán theo các bước:

Bước 1: Tính giá trị của các hàm số lượng giác có trong biểu thức là $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

Bước 2: Thay $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ vào biểu thức của A.

Cách giải này đương nhiên không sai nhưng sẽ rất phức tạp nếu giá trị của sinα và cosα là các biểu thức vô tỉ hoặc giá trị của tgα phải biện luận theo tham số. Như vậy cách giải tốt nhất là thực hiện theo các bước:

Bước 1: Rút gọn biểu thức - thực hiện như trong ví dụ.

Bước 2: Suy ra A = 2m.

2. Với các biểu thức chứa nhiều biến, điều quan trọng nhất là cần khéo léo đôi chút.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$H = \frac{\cot g\alpha + \cot g\beta}{tg\alpha + tg\beta}.$$

Giải

Ta có:

$$H = \frac{\dfrac{1}{tg\alpha} + \dfrac{1}{tg\beta}}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha . tg\beta}}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{1}{tg\alpha . tg\beta} = \cot g\alpha . \cot g\beta.$$

Chú ý: Trong đại số, chúng ta đã làm quen với việc khai triển đa thức dựa trên các biểu thức đối xứng, ý tưởng đó cũng được sử dụng trong việc khai triển các biểu thức lượng giác dựa trên hằng đẳng thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Để thuận lợi cho việc bắt đầu ta cần nhớ:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b).$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b).$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức:

$$A = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha). \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^6\alpha + \cos^6\alpha &= (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3\\ &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\\ &= 1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha. \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^4\alpha + \cos^4\alpha &= (\sin^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^2 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha. \qquad (3)\end{aligned}$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$A = 2(1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha) - 3(1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha) = -1.$$

Chú ý: **Ta nhận thấy giá trị của A = −1, tức là không phụ thuộc α, do đó nhiều trường hợp bài toán rút gọn biểu thức được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α*". Để minh hoạ ta xét các ví dụ sau:**

Ví dụ 5: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \frac{(1-\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\sin^4\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} = \frac{(1+\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$A = \frac{(1-\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} - \frac{(1+\mathrm{cotg}^2\alpha)^2}{\mathrm{cotg}^2\alpha} = -4.$$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp cần biết tận dụng tính bất biến của biểu thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dưới dạng $A = A.1 = A.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$ để cân bằng bậc cho biểu thức. Để minh hoạ ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^2\alpha.$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + 1.\sin^2\alpha \\ &= \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).\sin^2\alpha \\ &= \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = 3(\sin^8\alpha - \cos^8\alpha) + 4(\cos^6\alpha - 2\sin^6\alpha) + 6\sin^4\alpha. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^8\alpha - \cos^8\alpha &= (\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \\ &= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \\ &= \sin^6\alpha + \sin^2\alpha.\cos^4\alpha - \cos^2\alpha.\sin^4\alpha - \cos^6\alpha. \qquad (2) \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} A &= -5\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha.\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha.\sin^4\alpha + \cos^6\alpha + 6\sin^4\alpha \\ &= -6\sin^6\alpha + (\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha.\cos^4\alpha + 3\cos^2\alpha.\sin^4\alpha + \cos^6\alpha) - \\ &\qquad\qquad - 6\cos^2\alpha.\sin^4\alpha + 6\sin^4\alpha \\ &= -6\sin^4\alpha.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 + 6\sin^4\alpha \\ &= -6\sin^4\alpha + 1 + 6\sin^4\alpha = 1, \text{ không phụ thuộc } \alpha. \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α, β:

$$A = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} - \text{cotg}^2\alpha.\text{cotg}^2\beta. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta}.\text{cotg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha} = (1 + \text{cotg}^2\beta)\text{cotg}^2\alpha - (1 + \text{cotg}^2\alpha)$$

$$= \text{cotg}^2\alpha.\text{cotg}^2\beta - 1. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $A = -1$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha.$$

Bài tập 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.\left[1 - \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right].$$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức:

$$H = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta}$$

Bài tập 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha - 2(1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2.$$

☐ $A = -1$. ☐ $A = 1$.

Bài tập 5: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

☐ $A = 1$. ☐ $A = -2$.

Bài tập 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \frac{(1 - \text{tg}^2\alpha)^2}{\text{tg}^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}.$$

☐ $A = 4$. ☐ $A = -4$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Ta có:

$$A = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Bài tập 2: Ta có:

$$A = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.\left[1 - \frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}\right] = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.\left[1 - \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right]$$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.\frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 2\text{cotg}\alpha.$$

Bài tập 3: Ta có:

$$H = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{\dfrac{1}{\text{tg}\alpha} + \dfrac{1}{\text{tg}\beta}} = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{\dfrac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}} = \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.$$

Bài tập 4: Ta có:

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$$

$$= [(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha]^2 - 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$$

$$= (1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$$

$$= 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha - 4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + 1$$

$$= 2(\sin^4\alpha.\cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + 1) - 1 = 2(1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2 - 1.$$

Thay vào biểu thức ban đầu ta được $A = -1$.

Bài tập 5: Ta có:

$$A = \sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).\cos^2\alpha$$

$$= \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$$

Bài tập 6: Ta có:

$$\frac{(1-\text{tg}^2\alpha)^2}{\text{tg}^2\alpha} = (1 - \text{tg}^2\alpha)^2.\text{cotg}^2\alpha = (\text{cotg}\alpha - \text{tg}^2\alpha.\text{cotg}\alpha)^2 = (\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha)^2$$

$$= \text{cotg}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha - 2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 - 2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 4$$

Thay vào biểu thức ban đầu ta được $A = -4$.

BÀI TOÁN 4

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Cho biết hàm số lượng giác của góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), tính các hàm số lượng giác còn lại của góc đó.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả:

Dạng 1: Giả sử biết $\cos\alpha$, ta được:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ hoặc } \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Dạng 2: Giả sử biết $\sin\alpha$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ thì $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha \ge 0$ do đó:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\text{hoặc } \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \text{cotg}^2\alpha \Rightarrow \text{cotg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1}.$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ hoặc } \text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\alpha}.$$

Trường hợp 2: Nếu $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ thì $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha \le 0$ do đó:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ hoặc } \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Dạng 3: Giả sử biết $\text{tg}\alpha$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\text{tg}\alpha \ge 0 \Leftrightarrow 0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, thì $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\text{cotg}\alpha \ge 0$ do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \text{tg}\alpha.\cos\alpha,$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\text{tg}\alpha \le 0 \Leftrightarrow 90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, thì cosα, tgα, cotgα ≤ 0 do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \text{tg}\alpha.\cos\alpha,$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Dạng 4: Giả sử biết cotgα, tương tự dạng 3.

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \text{cotg}^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}},$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \text{cotg}\alpha.\sin\alpha.$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\alpha}.$$

Dạng 5: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác, cần tính giá trị của các hàm số lượng giác của một góc α, ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng chỉ chứa một hàm lượng giác rồi thực hiện phép đặt ẩn phụ (nếu cần) để giải một phương trình đại số.

Hướng 2: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích A.B = 0.

Hướng 3: Sử dụng bất đẳng thức để thực hiện phép đánh giá.

Dạng 6: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác (ký hiệu (1)), cần tính giá trị của biểu thức lượng giác khác (ký hiệu (2)), ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi (1) rồi thay vào (2).

Hướng 2: Biến đổi (2) rồi sử dụng (1).

Hướng 3: Biến đổi đồng thời (1) và (2) dẫn tới biểu thức trung gian (3).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Biết $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

a. Tính sinα, tgα, cotgα.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha}$.

Giải

a. Ta có:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4},$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{4}{3}.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$A = \frac{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{25}{7}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{1}{2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1} = \frac{25}{7}.$$

Nhận xét:

1. Người ta có thể dễ dàng mở rộng cho ví dụ trên vẫn với yêu cầu a), b), chỉ có điều kiện $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ được thay bởi:

$$5\cos^2\alpha - 14\cos\alpha + 8 = 0. \qquad (*)$$

Khi đó, bằng cách đặt $x = \cos\alpha$, điều kiện $|x| \le 1$, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{5} \\ x = 2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

2. Việc trình bày câu b) trong ví dụ trên theo hai cách với mục đích giúp các em học sinh tiếp cận dần với tính đa dạng trong biến đổi lượng giác cũng như tính độc lập khi tách bài toán làm hai ví dụ riêng biệt. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Biết $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$, tính giá trị của biểu thức

$$A = \text{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

Giải

Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{(1 + \sin\alpha)\sin\alpha + \cos^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Vậy, ta được:

$$A = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1).$$

Ví dụ 3: Biết $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \cos\alpha}{\cos^3\alpha}$.

Giải

a. Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos\alpha < 0$, từ đó:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{5}{12},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{12}{5}.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$B = \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{-\frac{12}{5}+\frac{12}{13}}{\left(-\frac{12}{13}\right)^3} = \frac{169}{90}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{\sin\alpha}-1\right)\cos\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}}{1-\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{(1+\sin\alpha)\sin\alpha} = \frac{1}{\left(1+\frac{5}{13}\right)\frac{5}{13}} = \frac{169}{90}.$$

Chú ý: Cũng như nhận xét trong ví dụ 1, người ta có thể dễ dàng mở rộng bằng cách thay đổi điều kiện ban đầu để cho $\sin\alpha$ là nghiệm của

a. Phương trình bậc nhất, tức là $13\sin\alpha - 5 = 0$.

b. Phương trình bậc hai, thí dụ $26\sin^2\alpha + 29\sin\alpha - 15 = 0$.

c. Phương trình bậc cao, thí dụ $13\sin^3\alpha - 5\sin^2\alpha + 13\sin\alpha - 5 = 0$.

d. Nghiệm của bất đẳng thức.

Ví dụ 4: Biết $tg\alpha = -2$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $C = \dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha}$.

Giải

a. Vì $tg\alpha = -2 < 0$ nên $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, tức là $\cos\alpha < 0$ do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = tg\alpha.\cos\alpha = -2.\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$C = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = \frac{\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}}{\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}} = 0.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$C = \frac{\dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{tg\alpha + 2}{tg\alpha - 2} = 0.$$

Chú ý: Người ta có thể dễ dàng mở rộng bằng cách thay đổi điều kiện ban đầu như $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = -2\cos\alpha \Leftrightarrow tg\alpha = -2$.

Ví dụ 5: Biết $cotg\alpha = 3$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $D = \dfrac{1}{\cos^2\alpha - \cos\alpha.\sin\alpha + \sin^2\alpha}$.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + cotg^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = cotg\alpha.\sin\alpha = 3.\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$D = \frac{1}{\cos^2\alpha - \cos\alpha.\sin\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - \dfrac{3}{\sqrt{10}}.\dfrac{1}{\sqrt{10}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{10}{7}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$D = \frac{1}{\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos\alpha.\sin\alpha}{\sin^2\alpha} + 1\right)\sin^2\alpha} = \frac{1+\cot g^2\alpha}{\cot g^2\alpha - \cot g\alpha + 1} = \frac{10}{7}.$$

Chú ý: Như vậy thông qua 4 ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với 4 dạng toán 1, 2, 3, 4 được trình bày trong bài toán cơ bản, các ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ cho dạng 5 và 6.

Ví dụ 6: Biết $tg\alpha + cotg\alpha = 2$. (1)

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $cotg\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{tg^2\alpha + \cot g^2\alpha}$. (2)

Giải

a. Nhận xét rằng $tg\alpha$, $cotg\alpha$ luôn cùng dấu, do đó từ (1) suy ra $tg\alpha, cotg\alpha > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$tg\alpha + cotg\alpha \geq 2\sqrt{tg\alpha.\cot g\alpha} = 2,$$

do đó để có được (1) thì dấu "=" phải xảy ra trong bất đẳng thức trên

$$\Leftrightarrow tg\alpha = cotg\alpha \overset{(1)}{\Leftrightarrow} tg\alpha = cotg\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0,$$

từ đó $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$E = \frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{tg^2\alpha + \cot g^2\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1} = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$tg\alpha + cotg\alpha = 2 \Leftrightarrow (tg\alpha + cotg\alpha)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow tg^2\alpha + cotg^2\alpha + 2tg\alpha.cotg\alpha = 4 \Leftrightarrow tg^2\alpha + cotg^2\alpha = 2. \quad (3)$$

$$2 = tg\alpha + cotg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha.\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha.\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Thay (3), (4) vào (2), ta được:

$$E = \frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{tg^2\alpha + \cot g^2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Chú ý:

1. Lời giải trong cách 2 của câu b) được sử dụng trong trường hợp tổng quát $tg\alpha + cotg\alpha = m$.

2. Nếu các em học sinh chưa thật thành thạo với việc sử dụng bất đẳng thức thì có thể giải (1) như phương trình bậc hai theo $tg\alpha$, cụ thể:

Đặt $t = tg\alpha$, khi đó (1) được biến đổi thành:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow tg\alpha = 1$$

từ đó suy ra:

$$\alpha = 45^0 \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } cotg\alpha = 1.$$

Như vậy chúng ta ghi nhận rằng với biểu thức điều kiện thông thường tồn tại hai hướng khai thác tường minh. Để tiện theo dõi chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$. (1)

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $cotg\alpha$.

b. Tính giá trị của biểu thức $F = \sin^5\alpha + \cos^5\alpha$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin\alpha = \sqrt{2} - \cos\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = (\sqrt{2} - \cos\alpha)^2 \text{, bởi } \sin\alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2\alpha = 2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha + \cos^2\alpha \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tg\alpha = cotg\alpha = 1.$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (1.\sin\alpha + 1.\cos\alpha)^2 \leq (1 + 1)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2$$

$$\Leftrightarrow |\sin\alpha + \cos\alpha| \leq \sqrt{2}.$$

Do đó để có được (1) thì dấu "=" phải xảy ra trong bất đẳng thức trên

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow tg\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0,$$

từ đó $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $cotg\alpha = 1$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$F = \sin^5\alpha + \cos^5\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}F &= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^3\alpha.\cos\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos^3\alpha + \cos^4\alpha)\\ &= (\sin\alpha + \cos\alpha)[(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - \sin\alpha.\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha]\\ &= (\sin\alpha + \cos\alpha)[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha]\\ &= (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha). \qquad (3)\end{aligned}$$

Từ giả thiết, ta được:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Thay (1), (4) vào (3), ta được:

$$F = \sqrt{2}.\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Chú ý:

1. Lời giải trong cách 1 của câu a) được sử dụng trong trường hợp tổng quát $a.\sin\alpha + b.\cos\alpha = c$.
2. Lời giải trong cách 2 của câu b) được sử dụng trong trường hợp tổng quát
   a. $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.
   b. $\sin\alpha.\cos\alpha = m$.

Ví dụ 8: Tính cosα, sinα, tgα, cotgα, biết:

$$3(\cos\alpha - 3\sin\alpha - 1) = \text{cotg}\alpha, \text{ với } 0 < \alpha < 180^0. \qquad (1)$$

Giải

Ta biến đổi (1) về dạng:

$$3(\cos\alpha - 3\sin\alpha) - (\text{cotg}\alpha - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\alpha.\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 3\right) - (\text{cotg}\alpha - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\sin\alpha - 1)(\text{cotg}\alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = \frac{1}{3}\\ \text{cotg}\alpha = 3\end{array}\right..$$

- Với $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, ta có: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ và } \text{cotg}\alpha = 2\sqrt{2}\\ \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ và } \text{cotg}\alpha = -2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

- Với $\text{cotg}\alpha = 3$, tương tự ví dụ 5.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biết $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

a. Tính sinα, tgα.

☐ $\sin\alpha = \frac{15}{17}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{8}$. ☐ $\sin\alpha = \frac{15}{17}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{8}$.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5\cot g\alpha + 4\mathrm{tg}\alpha}{5\cot g\alpha - 4\mathrm{tg}\alpha}$.

☐ $A = \frac{61}{29}$. ☐ $A = -\frac{61}{29}$.

Bài tập 2: Biết $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a. Tính cosα, cotgα.

☐ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. ☐ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

b. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\mathrm{tg}\alpha \quad \cos\alpha}{\cot g\alpha}$.

☐ $B = \frac{2}{15}$. ☐ $B = \frac{3}{15}$.

c. Tính giá trị của biểu thức $B_1 = \frac{\mathrm{tg}\alpha.\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos\alpha.\mathrm{cotg}\alpha$.

☐ $B_1 = \frac{2}{3}$. ☐ $B_1 = \frac{3}{2}$.

Bài tập 3: Biết $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

a. Tính cosα, tgα.

☐ $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. ☐ $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

b. Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{\cot g\alpha \quad \mathrm{tg}\alpha}{\cot g\alpha + \mathrm{tg}\alpha}$.

☐ $C = \frac{7}{25}$. ☐ $C = \frac{9}{25}$.

Bài tập 4: Biết $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, tính giá trị của biểu thức:

$$C_1 = \mathrm{cotg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

☐ $C_1 = 2(\sqrt{2} \quad 1)$. ☐ $C_1 = 2(\sqrt{2} + 1)$.

Bài tập 5: Biết $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

a. Tính cosα, sinα.

☐ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. ☐ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

b. Tính giá trị của biểu thức $D = \frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

☐ $D = 7 + 4\sqrt{2}$.　　　　☐ $D = 7 - 4\sqrt{2}$.

Bài tập 6: Biết $\cot g\alpha = 2\sqrt{2}$.

a. Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

☐ $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.　　　　☐ $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin\alpha + 3\cos\alpha}$.

☐ $E = \frac{1 - 6\sqrt{2}}{1 + 6\sqrt{2}}$.　　　　☐ $E = \frac{-1 + 6\sqrt{2}}{-1 - 6\sqrt{2}}$.

Bài tập 7: Biết $tg\alpha + 2\cot g\alpha = 3$. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $\cot g\alpha$.

☐ $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\alpha = \cot g\alpha = 1$.

☐ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $tg\alpha = 2$, $\cot g\alpha = \frac{1}{2}$.

Bài tập 8: Biết $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $\cot g\alpha$.

☐ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\alpha = \cot g\alpha = -1$.

☐ Khác.

b. Tính giá trị của biểu thức $F = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

☐ $F = \frac{1}{4}$.　　　　☐ $F = \frac{1}{8}$.

Bài tập 9: Biết $\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $\cot g\alpha$.

☐ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\alpha = \cot g\alpha = -1$.

☐ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\alpha = \cot g\alpha = 1$.

b. Tính giá trị của biểu thức $G = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

☐ $G = \frac{1}{4}$.　　　　☐ $G = \frac{3}{4}$.

Bài tập 10: Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $\cot g\alpha$, biết:

a. $3\cos\alpha + 4\sin\alpha = 5$.

b. $3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 5$.

c. $a.\sin\alpha + b.\cos\alpha = 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$.

d. $(1+\frac{1}{\cos\alpha})\sin\alpha + (1+\frac{1}{\sin\alpha})\cos\alpha = 2+\sqrt{2}$.

e. $5\sin\alpha - 20\cos\alpha = 4(\mathrm{tg}\alpha - 4)$.

f. $49 - 50\sin\alpha.\cos\alpha = 12(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha)$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{15}{8}$ và $A = -\frac{61}{29}$.

Bài tập 2: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $B = \frac{2}{15}$ và $B_1 = \frac{2}{3}$.

Bài tập 3: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ hoặc $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ và $C = -\frac{7}{25}$.

Bài tập 4: $C_1 = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Bài tập 5: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ và $D = 7 - 4\sqrt{2}$.

Bài tập 6; $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ và $E = \frac{1-6\sqrt{2}}{1+6\sqrt{2}}$.

Bài tập 7: $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}\alpha = 1$.

hoặc $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{tg}\alpha = 2$, $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Bài tập 8:

a. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}\alpha = -1$.

b. $F = \frac{1}{4}$.

Bài tập 9:

a. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}\alpha = 1$.

hoặc $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}\alpha = -1$.

b. $G = \frac{3}{4}$.

BÀI TOÁN 5

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả để thực hiện phép biến đổi tương đương. Khi đó ta lựa chọn theo các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi vế trái (VT) thành vế phải (VP) hoặc ngược lại, trong trường hợp này thông thường ta lựa chọn việc biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng.

Hướng 3: Xuất phát từ một đẳng thức đúng, biến đổi thành đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý: Cần lưu ý rằng trong khi thực hiện các phép biến đổi, các em học sinh cần linh hoạt với việc làm đơn giản hoặc phức tạp thêm biểu thức để nhận được biểu thức tương thích, thí dụ:

- Với $A = 2 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$, đương nhiên ta sẽ thay $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, để nhận được $A = 1$.
- Trong trường hợp ngược lại, như đã biết với:

  $A = \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

ta sẽ thêm $1 = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ vào nhân tử $\sin^2\alpha$ để từ đó thu được biểu thức tương thích, cụ thể:

$$A = \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).\sin^2\alpha$$

$$= \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$$

Đó là những điều mà thực chất các em học sinh đã ghi nhận được trong bài toán rút gọn biểu thức.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$$(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha)^2 - (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{cotg}\alpha)^2 = 4.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$VT = (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{cotg}^2\alpha + 2\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\alpha) - (\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{cotg}^2\alpha - 2\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\alpha)$$

$$= 4\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\alpha = 4, \text{ đpcm.}$$

Cách 2: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$VT = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha)(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{cotg}\alpha)$$

$$= 4\mathrm{cotg}\alpha.\mathrm{tg}\alpha = 4, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Như vậy thông qua ví dụ trên, cho dù rất đơn giản, vẫn nhằm mục đích để các em học sinh hiểu rằng cho dù chỉ là phép biến đổi VT thì cũng có thể được thực hiện theo những cách khác nhau. Để thực sự sâu sắc hơn ta xét tiếp ví dụ sau:

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)^2=4\text{tg}^2\alpha.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT}=\left[\frac{(\sqrt{1-\cos\alpha})^2-(\sqrt{1+\cos\alpha})^2}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}\right]^2=\left|\frac{-2\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\right|^2=\left|\frac{-2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}\right|^2$$

$$=\frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=4\text{tg}^2\alpha,\ \text{đpcm}.$$

Cách 2: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-2.\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)^2+(1+\cos\alpha)^2-2(1-\cos^2\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=4\text{tg}^2\alpha,\ \text{đpcm}.$$

Nhận xét: Thông qua 2 ví dụ trên chúng ta đã biết cách chứng minh đẳng thức lượng giác bằng việc biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản, tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới những ví dụ có thể thực hiện theo hai cách:

Cách 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại.

Cách 2: Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về đẳng thức đúng.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\text{VT}=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$$

$$=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)=2\sin^2\alpha-1,\ \text{đpcm}.$$

Cách 2: Ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha+1-\cos^4\alpha=0\Leftrightarrow(1-\sin^2\alpha)^2-\cos^4\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow(\cos^2\alpha)^2-\cos^4\alpha=0\Leftrightarrow\cos^4\alpha-\cos^4\alpha=0,\ \text{luôn đúng}.$$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

$$\sin^2\alpha.\text{tg}\alpha+\cos^2\alpha.\text{cotg}\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha=\text{tg}\alpha+\text{cotg}\alpha.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức cần chứng minh:

$$VT = \sin^2\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos^2\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$= \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha.\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha, \text{ dpcm.}$$

Cách 2: Ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$(1 - \sin^2\alpha)\text{tg}\alpha + (1 - \cos^2\alpha)\text{cotg}\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin^2\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 0.$$

$\Leftrightarrow 0 = 0$, luôn đúng.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+\text{tg}\alpha} + \frac{1}{1+\cot g\alpha} = 1$$

Giải.

Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$VT = \frac{1}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} + \frac{1}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = 1, \text{ dpcm.}$$

Cách 2: Ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$1 + \text{cotg}\alpha + 1 + \text{tg}\alpha = (1 + \text{cotg}\alpha)(1 + \text{tg}\alpha)$

$\Leftrightarrow 2 + \text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha = 1 + \text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha.\text{tg}\alpha$

$\Leftrightarrow 0 = 0$, luôn đúng.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 2.$$

Giải

Ta có thể thực hiện theo ba cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức cần chứng minh:

$$VT = \frac{1}{\sin^2\alpha}.\frac{1}{\cos^2\alpha} = (1 + \text{cotg}^2\alpha)(1 + \text{tg}^2\alpha)$$

$$= 1 + \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha.\,\text{cotg}^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 1$$

$$= \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 2, \text{ dpcm.}$$

Cách 2: Ta biến đổi VP của đẳng thức cần chứng minh, dựa trên đánh giá $\text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha = 1$:

$$VP = \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 1 + 1 = \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha + 1 + \text{tg}^2\alpha.\text{cotg}^2\alpha$$

$$= (1 + \cot g^2\alpha)(1 + tg^2\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha}.\frac{1}{\cos^2\alpha} = VT.$$ đpcm.

Cách 3: Ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$1 = (tg^2\alpha + \cot g^2\alpha + 2).\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 \Leftrightarrow 1 = 1,$$ luôn đúng.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng:

$$(1 + tg\alpha)(1 + \cot g\alpha)\sin\alpha.\cos\alpha = (1 + tg\alpha)\cos^2\alpha + (1 + \cot g\alpha)\sin^2\alpha.$$

Giải

Ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}).\cos\alpha.(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})\sin\alpha = (1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})\cos^2\alpha + (1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})\sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow (\cos\alpha + \sin\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = \cos^2\alpha + \sin\alpha.\cos\alpha + \sin^2\alpha + \sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2,$$ luôn đúng.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

a. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

b. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

a. $(1 + tg\alpha)(1 + \cot g\alpha)\sin\alpha.\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha.$

b. $(1 + tg\alpha)\cos^2\alpha + (1 + \cot g\alpha)\sin^2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2.$

Bài tập 3: Chứng minh rằng:

a. $\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

b. $\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}(1 - \frac{(1 + \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}) = 2\cot g\alpha.$

Bài tập 4: Chứng minh rằng:

a. $\frac{tg\alpha - \sin\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha(1 + \cos\alpha)}.$

b. $1 - \frac{\sin^2\alpha}{1 + \cot g\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{1 + tg\alpha} = \sin\alpha.\cos\alpha.$

Bài tập 5: Chứng minh rằng:

$$\left(\sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} \quad \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}\right)^2 = 4tg^2\alpha.$$

BÀI TOÁN 6

HÀM LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ, BÙ NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hàm lượng giác của hai góc phụ, bù nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hệ quả:

Hàm số lượng giác của hai góc bù nhau	*Hàm số lượng giác của hai góc phụ nhau*
a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$.	a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$.
b. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.	b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$.
c. $\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.	c. $\mathrm{tg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$.
d. $\mathrm{cotg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$.	d. $\mathrm{cotg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$.

cùng với các phương pháp đã biết qua các bài toán 1, 2, 3, 4, 5, trong mục này chúng ta giải quyết các dạng toán:

Dạng 1: Biết giá trị một hàm lượng giác của góc α, tính giá trị các hàm số lượng giác của góc dương $90^0-\alpha$, $180^0-\alpha$.

Dạng 2: So sánh.

Dạng 3: Đơn giản biểu thức.

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức.

Dạng 5: Tính tổng hữu hạn.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Biết $\mathrm{tg}75^{\circ} = 2 + \sqrt{3}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của

a. Góc 105°.

b. Góc 15°.

Giải

a. Ta có:

$$\mathrm{tg}105^{\circ} = \mathrm{tg}(180^0 - 75^{\circ}) = -\mathrm{tg}75^{\circ} = -2 - \sqrt{3},$$

$$\mathrm{cotg}105^{\circ} = \frac{1}{\mathrm{tg}105^0} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2,$$

$$\cos105^{\circ} = \cos(180^0 - 75^{\circ}) = -\cos75^0. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha \Rightarrow \cos75^0 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 75^0}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\cos 105^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Khi đó, từ:

$$\text{tg}105^\circ = \frac{\sin 105^0}{\cos 105^0}$$

$$\Rightarrow \sin 105^\circ = \text{tg}105^\circ.\cos 105^\circ = (-2-\sqrt{3}).\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

b. Ta có:

$$\text{cotg}15^0 = \text{cotg}(90^0 - 75^0) = \text{tg}75^\circ = 2+\sqrt{3},$$

$$\text{tg}15^\circ = \frac{1}{\text{cotg}15^0} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

$$\sin 15^0 = \sin(90^0 - 75^0) = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{cotg}15^\circ = \frac{\cos 15^0}{\sin 15^0} \Rightarrow \cos 15^\circ = \text{cotg}15^\circ.\sin 15^\circ = (2+\sqrt{3}).\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 2: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 51^0 18'$ và $\sin 132^0$.

b. $\cos 27^0$ và $\sin 61^0$.

c. $\text{tg}47^0$ và $\text{cotg}41^0$.

Giải

a. Ta có:

$\sin 132^0 = \sin(180^0 - 132^0) = \sin 48^0$,

$0^0 < 48^0 < 51^0 18' < 90^0$ và miền này hàm số sinx đồng biến,

do đó:

$\sin 51^0 18' > \sin 48^0 = \sin 132^0$.

b. Ta có:

$\cos 27^0 = \sin(90^0 - 27^0) = \sin 63^0$,

$0^0 < 61^0 < 63^0 < 90^0$ và miền này hàm số sinx đồng biến,

do đó:

$\sin 61^0 < \sin 63^0 = \cos 27^0$.

c. Ta có:

$\text{cotg}41^0 = \text{tg}(90^0 - 41^0) = \text{tg}59^0$;

$0^0 < 47^0 < 59^0 < 90^0$ và miền này hàm số tgx đồng biến,

do đó:

$\text{tg}47^0 < \text{tg}59^0 = \text{cotg}41^0$.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{1-\cos^2(90^0+\alpha)}{1-\sin^2(90^0-\alpha)} - \text{cotg}(90^0-\alpha).\text{tg}(\alpha-90^0).$$

Giải

Biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{1-\cos^2[180^0-(90^0-\alpha)]}{1-\cos^2\alpha} - \text{tg}\alpha.\text{tg}[90^0-(180^0-\alpha)]$$

$$= \frac{1-\cos^2(90^0-\alpha)}{1-\cos^2\alpha} - \text{tg}\alpha.\text{cotg}(180^0-\alpha)$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$A = \frac{[1-\text{cotg}^2(90^0+\alpha)]^2}{\text{cotg}^2(\alpha-90^0)} - \frac{1}{\sin^2(180^0-\alpha).\sin^2(90^0-\alpha)}. \quad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\frac{[1-\text{cotg}^2(90^0+\alpha)]^2}{\text{cotg}^2(\alpha-90^0)} = \frac{\{1-\text{cotg}^2[180^0-(90^0-\alpha)]\}^2}{\text{cotg}^2[90^0-(180^0-\alpha)]}$$

$$= \frac{[1-\text{cotg}^2(90^0-\alpha)]^2}{\text{tg}^2(180^0-\alpha)} = \frac{(1-\text{tg}^2\alpha)^2}{\text{tg}^2\alpha}$$

$$= (1-\text{tg}^2\alpha)^2.\text{cotg}^2\alpha = (\text{cotg}\alpha - \text{tg}^2\alpha.\text{cotg}\alpha)^2$$

$$= (\text{cotg}\alpha - \text{tg}\alpha)^2 = \text{cotg}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha - 2$$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 - 2 = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 4. \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin^2(180^0-\alpha).\sin^2(90^0-\alpha)} = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được A = –4.

***Chú ý*: Thông các những phép biến đổi nhỏ trong ví dụ 3, 4, các em học sinh hãy vận dụng để chứng minh các công thức khá quan trọng sau:**

a. Cung đối nhau

- **sin(–x) = –sinx**
- **cos(–x) = cosx**
- **tg(–x) = –tgx**
- **cotg(–x) = –cotgx**

b. Cung hơn kém nhau 180^0

- $\sin(180^0 + x) = -\sin x$
- $\cos(180^0 + x) = -\cos x$
- $\operatorname{tg}(180^0 + x) = \operatorname{tg}x$
- $\operatorname{cotg}(180^0 + x) = \operatorname{cotg}x$

c. Cung hơn kém nhau 90^0

- $\sin(90^0 + x) = \cos x$
- $\cos(90^0 + x) = -\sin x$
- $\operatorname{tg}(90^0 + x) = -\operatorname{cotg}x$
- $\operatorname{cotg}(90^0 + x) = -\operatorname{tg}x$

Ví dụ 5: Cho ΔABC, biểu diễn các hàm lượng giác của

a. Góc A bằng các hàm lượng giác của góc B và C.

b. Góc $\frac{A}{2}$ bằng các hàm lượng giác của góc $\frac{B}{2}$ và $\frac{C}{2}$.

Giải

Ta luôn có:

$$A + B + C = 180^0. \qquad (1)$$

a. Từ (1), ta được:

$$A = 180^0 - (B + C)$$

suy ra:

$$\sin A = \sin[180^0 - (B + C)] = \sin(B + C),$$
$$\cos A = \cos[180^0 - (B + C)] = -\cos(B + C),$$
$$\operatorname{tg}A = \operatorname{tg}[180^0 - (B + C)] = -\operatorname{tg}(B + C),$$
$$\operatorname{cotg}A = \operatorname{cotg}[180^0 - (B + C)] = -\operatorname{cotg}(B + C).$$

b. Từ (1), ta được:

$$\frac{A}{2} = 90^0 - \frac{B+C}{2}$$

suy ra:

$$\sin\frac{A}{2} = \sin[90^0 - \frac{B+C}{2}] = \cos\frac{B+C}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \cos[90^0 - \frac{B+C}{2}] = \sin\frac{B+C}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}[90^0 - \frac{B+C}{2}] = \operatorname{cotg}\frac{B+C}{2},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{cotg}[90^0 - \frac{B+C}{2}] = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}.$$

Ví dụ 6: Tính tổng:

$$S = \cos 10^0 + \cos 30^0 + ... + \cos 150^0 + \cos 170^0.$$

Giải

Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\cos 10^0 + \cos 170^0) + (\cos 30^0 + \cos 150^0) +$$
$$+ (\cos 50^0 + \cos 130^0) + (\cos 70^0 + \cos 110^0) + \cos 90^0$$
$$= (\cos 10^0 - \cos 10^0) + (\cos 30^0 - \cos 30^0) +$$
$$+ (\cos 50^0 - \cos 50^0) + (\cos 70^0 - \cos 70^0) = 0.$$

Ví dụ 7: Tính tổng:

$$S = \text{cotg}15^0 + \text{cotg}30^0 + ... + \text{cotg}150^0 + \text{cotg}165^0.$$

Giải

Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\text{cotg}15^0 + \text{cotg}165^0) + (\text{cotg}30^0 + \text{cotg}150^0) + ... +$$
$$+ (\text{cotg}75^0 + \text{cotg}105^0) + \text{cotg}90^0$$
$$= (\text{cotg}15^0 - \text{cotg}15^0) + (\text{cotg}30^0 - \text{cotg}30^0) + ... + (\text{cotg}75^0 - \text{cotg}75^0) = 0.$$

Ví dụ 8: Tính tổng:

$$S = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + ... + \sin^2 90^0.$$

Giải.

Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\sin^2 10^0 + \sin^2 80^0) + ... + (\sin^2 40^0 + \sin^2 50^0) + \sin^2 90^0$$
$$= (\sin^2 10^0 + \cos^2 10^0) + ... + (\sin^2 40^0 + \cos^2 40^0) + 1 = 5.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biết $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, với $0 < \alpha < 90^0$, tính giá trị các hàm số lượng giác của các góc $90^0 - \alpha$ và $180^0 - \alpha$.

Bài tập 2: Biết $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, với $90^0 < \alpha < 180^0$, tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $180^0 - \alpha$.

Bài tập 3: Biết $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của các góc $90^0 - \alpha$ và $180^0 - \alpha$.

Bài tập 4: Biết $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $180^0 - \alpha$.

Bài tập 5: Biết $\text{tg}\alpha = \frac{5}{4}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của các góc $90^0 - \alpha$ và $180^0 - \alpha$.

Bài tập 6: Biết $\text{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $180^0 - \alpha$.

Bài tập 7: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 11^0 8'$ và $\sin 168^0$.

☐ $\sin 11^0 8' > \sin 168^0$ ☐ $\sin 11^0 8' < \sin 168^0$.

b. $\cos 53^0$ và $\sin 39^0$.

☐ $\cos 53^0 < \sin 39^0$. ☐ $\cos 53^0 > \sin 39^0$.

c. $tg 33^0$ và $cotg 52^0$.

☐ $tg 33^0 > cotg 52^0$. ☐ $tg 33^0 < cotg 52^0$.

Bài tập 8: Rút gọn biểu thức:

a. $A = 2[\sin^6\alpha + \sin^6(90^0 - \alpha)] - 3[\sin^4(180^0 - \alpha) + \cos^4\alpha)] + 2$

b. $B = \dfrac{1 - \sin^2(180^0 - \alpha)}{1 - \sin^2(90^0 - \alpha)} - cotg(90^0 - \alpha).cotg(180^0 - \alpha)$.

Bài tập 9: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = \cos^4(180^0 - \alpha) + \sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha) + \cos^2(90^0 - \alpha)$.

☐ $A = 1$. ☐ $A = 2$. ☐ Khác.

b. $B = \dfrac{[1 - cotg^2(180^0 - \alpha)]^2}{tg^2(90^0 - \alpha)} - \dfrac{1}{\sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha)}$.

☐ $B = 1$. ☐ $B = -4$ ☐ Khác.

Bài tập 10: Tính tổng:

$$S = \cos 20^0 + \cos 40^0 + ... + \cos 160^0 + \cos 180^0.$$

☐ $S = 1$. ☐ $S = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 11: Tính tổng:

$$S = tg10^0 + tg30^0 + tg50^0 + tg70^0 + tg110^0 + tg130^0 + tg150^0 + tg170^0.$$

☐ $S = 0$. ☐ $S = 8$. ☐ Khác.

Bài tập 12: Tính tổng:

$$S = \sin^2 1^0 + \sin^2 2^0 + ... + \sin^2 180^0.$$

☐ $S = 89$. ☐ $S = 90$. ☐ Khác.

Bài tập 13: Tính tổng:

$$S = \cos^2 2^0 + \cos^2 4^0 + ... + \cos^2 90^0.$$

☐ $S = 22$. ☐ $S = 21$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 7:

a. $\sin 11^0 8' < \sin 168^0$.

b. $\cos 53^0 < \sin 39^0$.

c. $tg 33^0 < cotg 52^0$.

Bài tập 9: $A = 1$, $B = -4$.

Bài tập 10: Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\cos 20^0 + \cos 160^0) + (\cos 40^0 + \cos 140^0) +$$

$$+ (\cos 60^0 + \cos 120^0) + (\cos 80^0 + \cos 100^0) + \cos 180^0$$

$$= (\cos 20^0 - \cos 20^0) + (\cos 40^0 - \cos 40^0) +$$

$$+ (\cos 60^0 - \cos 60^0) + (\cos 80^0 - \cos 80^0) - 1 = -1.$$

Bài tập 11: Viết lại S dưới dạng:

$$S = (tg10^0 + tg170^0) + (tg30^0 + tg150^0) + (tg50^0 + tg130^0) + (tg70^0 + tg110^0)$$

$$= (tg10^0 - tg10^0) + (tg30^0 - tg30^0) + (tg50^0 - tg50^0) + (tg70^0 - tg70^0)$$

$$= 0.$$

Bài tập 12: $S = 90$.

Bài tập 13: $S = 22$.

CHỦ ĐỀ 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. ĐỊNH NGHĨA

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) ký hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha, \text{ với } \alpha = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Từ định nghĩa ta có các kết quả:

a. $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

b. $\vec{a}.\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > 0 \Leftrightarrow 0^0 \leq \alpha < 90^0$.

c. $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

d. $\vec{a}.\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow 90^0 < \alpha \leq 180^0$.

Nếu một trong hai vectơ bằng $\vec{0}$ thì ta quy ước:

$$\vec{a}.\vec{0} = \vec{b}.\vec{0} = 0$$

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và với mọi số thực k ta đều có :

Tính chất 1: (Tính chất giao hoán): $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$.

Tính chất 2: (Tính chất phân phối): $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

Tính chất 3: $m(\vec{a}).\vec{b} = m(\vec{a}.\vec{b})$.

3. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$.
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$.
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$.

4. CÔNG THỨC HÌNH CHIẾU

a. Nếu 4 điểm A, B, C, D cùng ở trên một trục thì:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{CD}.$$

b. Nếu A', B' là hình chiếu của A, B lên giá của $\overrightarrow{CD}$ thì:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}.$$

5. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Nếu $\vec{a}(a_1, a_2)$ và $\vec{b}(b_1, b_2)$ thì:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2.$$

Góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ xác định bởi:

$$\cos\alpha = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

BÀI TOÁN 1
TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tính tích vô hướng của hai vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: *Sử dụng định nghĩa* bằng cách đưa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ về cùng gốc để xác định được góc $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$, từ đó:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha.$$

Phương pháp 2: *Sử dụng các tính chất* và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

Phương pháp 3: *Sử dụng định lý hình chiếu*: với A', B' là hình chiếu của A, B lên giá của $\overrightarrow{CD}$, ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}.$$

Phương pháp 4: *Sử dụng biểu thức toạ độ.*

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a, trọng tâm G.

a. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

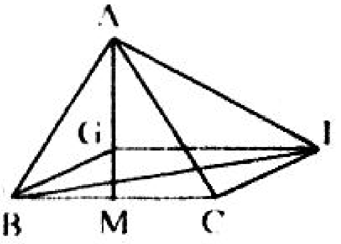
b. Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. CMR BCIG là hình bình hành, từ đó tính $\overrightarrow{IA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

Giải

a. Ta có:

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 60^\circ = a.a.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2.$



$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ.$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.\cos 120^\circ = a.a.(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a^2.$

b. Ta có:

$\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GI}) - 2(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GI}) + 4(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GI}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) - 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GI} \Leftrightarrow$ BCIG là hình bình hành.

Gọi M là trung điểm BC, ta được:

$\overrightarrow{IA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA}).2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AM}$

$$= 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM} - 2GA.AM = -2\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = -a^2.$$

$$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = IA^2 + \overrightarrow{IA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= AG^2 + GI^2 - a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2 - a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{5a^2}{6}.$$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA})(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC}) = IG^2 + \overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{IC}$$

$$= IG^2 + \overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = IG^2 + IG.IC.\cos 30^0 + GA.GB.\cos 120^0$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{17a^2}{24}.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c.

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c, từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{AB}$.

b. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC, tính độ dài AM, từ đó suy ra độ dài AG và cosin góc nhọn tạo bởi AG và BC.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1), ta được:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2.$$

$$\Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

Theo tính giao hoán, ta có:

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

Bằng cách tính tương tự, ta được:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) \text{ và } \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Từ đó:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(a^2 + c^2 + b^2).$$

Chú ý: Ta cũng có thể tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ bằng cách:

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}. \qquad (2)$$

Bình phương hai vế của (2), ta được:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(a^2 + c^2 + b^2).$$

b. Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \qquad (3)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (3), ta được:

$$AM^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{4}\left[c^2 + b^2 + 2.\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)\right] = \frac{1}{4}(2c^2 + 2b^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}. \qquad (*)$$

Suy ra

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.$$

Chú ý: Công thức (*) là công thức quan trọng cần nhớ.

Gọi α là góc nhọn tạo bởi AG và BC, khi đó:

$$|\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AG}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AG}|.|\overrightarrow{BC}|}. \qquad (4)$$

Ta tính $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$, bằng cách:

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{3}(b^2 - c^2).(5)$$

Thay (5) vào (4), ta được:

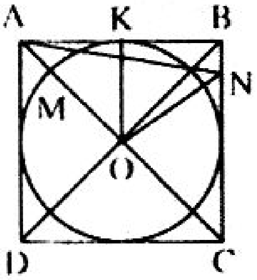
$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}|b^2 - c^2|}{\frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.a} = \frac{|b^2 - c^2|}{a.\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}.$$

Ví dụ 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. M là điểm tuỳ ý trên đường tròn nội tiếp hình vuông và N là điểm tuỳ ý trên cạnh BC. Tính:

a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

b. $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$.

c. $NO.\overrightarrow{BA}$.



Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})$$

$$=2MO^2+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}+$$

$$+\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{4}a^2,$$

bởi $OA\perp OB$, $OC\perp OD$ và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b. Nhận xét rằng B là hình chiếu vuông góc của N lên AB, do đó:

$$\overline{NA}.\overline{AB}=\overline{BA}.\overline{AB}=-\overline{AB}.\overline{AB}=-AB^2=-a^2.$$

c. Gọi K là trung điểm của AB, suy ra M là hình chiếu vuông góc của O lên AB, do đó:

$$\overline{NO}.\overline{BA}=\overline{BK}.\overline{BA}=\frac{1}{2}a.a=\frac{1}{2}a^2.$$

Chú ý: Với các bài toán có điều kiện, chúng ta cần vận dụng linh hoạt điều kiện để nhận được biểu thức cần dùng, cụ thể giả sử bài toán yêu cầu tính:

$$A=(\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b})(\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b})$$

biết rằng $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=c$, khi đó ta hiểu rằng:

$$A=\alpha_1\alpha_2\vec{a}^2+\beta_1\beta_2\vec{b}^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\vec{a}.\vec{b}$$

$$=\alpha_1\alpha_2a^2+\beta_1\beta_2b^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\vec{a}.\vec{b}.$$

Như vậy từ giả thiết ta cần nhận được giá trị của tích $\vec{a}.\vec{b}$, để có được nó ta sử dụng:

$$|\vec{a}+\vec{b}|=c\Leftrightarrow(\vec{a}+\vec{b})^2=c^2$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}=c^2\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)$$

Suy ra:

$$A=\alpha_1\alpha_2a^2+\beta_1\beta_2b^2+\frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(c^2-a^2-b^2).$$

Nhằm giúp các em học sinh hiểu sâu vấn đề trên, ta xét thêm ví dụ sau:

Ví dụ 4: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, thoả mãn $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính

$$A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}.$$

Giải

Từ giả thiết:

$$\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-2\vec{c}\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=4\vec{c}^2$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=4\vec{c}^2$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=\frac{1}{2}(3c^2-a^2-b^2).$$

Vậy $A = \frac{1}{2}(3c^2 - a^2 - b^2)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC đều cạnh bằng a, đường cao AH. Tính:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$.

☐ $-\frac{a^2}{4}$. ☐ $\frac{a^2}{4}$. ☐ Khác.

b. $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$.

☐ $\frac{a^2}{2}$. ☐ 0. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC có AB = 3, BC = 5, CA = 4. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

☐ 9 ☐ 12 ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC có AB = 2, BC = 3, CA = 4.

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ 6 ☐ 8 ☐ Khác.

b. Gọi D là điểm trên cạnh CA sao cho $CD = \frac{1}{3}CA$. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$

☐ 2 ☐ 14 ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có AB = 6, AC = 8, BC = 10.

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ 42 ☐ 24 ☐ Khác.

b. Trên cạnh AB, lấy điểm M sao cho AM = 2, trên cạnh AC, lấy điểm N sao cho AN = 4. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

☐ 3 ☐ 7 ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB = 2, đáy lớn BC = 3, đáy nhỏ AD = 2.

a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

☐ –4. ☐ –2. ☐ Khác.

b. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$.

☐ 2. ☐ 3. ☐ Khác.

c. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

☐ –1. ☐ 1. ☐ Khác.

d. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}$, với I là trung điểm của CD.

☐ 3. ☐ 7. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho lục giác đều ABCDEF, tâm O cạnh bằng a. Tích các tích vô hướng sau:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$.

☐ a^2. ☐ $-a^2$. ☐ Khác.

b. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$.

☐ $2a^2$. ☐ $-2a^2$. ☐ Khác.

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ $\frac{3a^2}{2}$. ☐ $\frac{a^2}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 7: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, thoả mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$. Tính

$$A = \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}.$$

☐ A = 5. ☐ A = 4. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = -\frac{a^2}{4}$.

b. $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 0$.

Bài tập 5:

a. Dùng phép chiếu, ta được $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -4$.

b. Dùng phép chiếu, ta được $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = 3$.

c. Dùng tính phân phối, ta được $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -1$.

d. Dùng tính phân phối, ta được $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Bài tập 6:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = a^2$.

b. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 2a^2$.

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{3a^2}{2}$.

Bài tập 7: A = −5.

BÀI TOÁN 2

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HAY VỀ ĐỘ DÀI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có hai dạng:

Dạng 1: *Với các biểu thức về tích vô hướng* ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng, cần đặc biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi.

Dạng 2: *Với các biểu thức về độ dài* ta thường sử dụng $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm A và B, O là trung điểm của AB, M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2.$$

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OM} + OM^2$$

$$= OM^2 - OA^2, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho MM_1 là đường kính bất kỳ của đường tròn tâm O, bán kính R. A là điểm cố định và OA = d. Giả sử AM cắt (O) tại N.

a. CMR tích vô hướng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM_1}$ có giá trị không phụ thuộc M.

b. CMR tích $\overline{AM}.\overline{AN}$ có giá trị không phụ thuộc M.

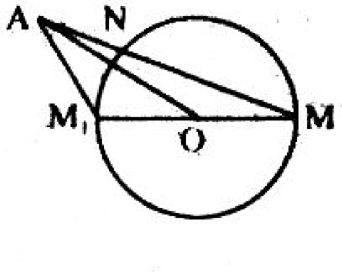
Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM_1} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM_1} - (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_1}).\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2$$

$$= OA^2 - OM^2 = d^2 - R^2.$$



b. Ta có:

$$\overline{AM}.\overline{AN} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1N})$$

$$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{M_1N} = d^2 - R^2.$$

Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB có AC, BD là hai dây thuộc nửa đường tròn, cắt nhau tại E. CMR:

$$\overline{AE}.\overline{AC}+\overline{BE}.\overline{BD}=AB^2.$$

Giải

Ta có:

$$\overline{AE}.\overline{AC}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

$$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

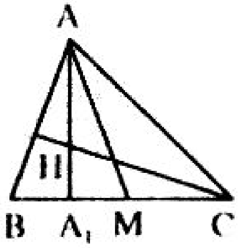
$$\overline{BE}.\overline{BD}=\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$$

$$=\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}. \qquad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$\overline{AE}.\overline{AC}+\overline{BE}.\overline{BD}=(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}).\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}).\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2.$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, H là trực tâm, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:



a. $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}BC^2.$

b. $MH^2+MA^2=AH^2+\frac{1}{2}BC^2.$

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CM}).(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM})$$

$$=\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM} \qquad (1)$$

Gọi A_1 là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC, ta được:

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CA_1}.\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{CA_1}.\overrightarrow{CM}, \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA_1}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA_1}.\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$$

$$=(\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{BA_1})\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$$

$$=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}=BC.\frac{BC}{2}-\frac{BC}{2}.\frac{BC}{2}=\frac{1}{4}BC^2.$$

b. Ta có:

$$AH^2=\overrightarrow{AH}^2=(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MA})^2$$

$$=MH^2+MA^2-2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=MH^2+MA^2-2.\frac{1}{4}BC^2$$

$$\Leftrightarrow MH^2+MA^2=AH^2+\frac{1}{2}BC^2\text{, đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. CMR:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC, M và M' là hai điểm tuỳ ý. Gọi H và H', K và K', L và L' lần lượt là hình chiếu của M và M' trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\overline{BC}.\overline{HH'} + \overline{CA}.\overline{KK'} + \overline{AB}.\overline{LL'} = 0$$

Bài tập 3: Cho ΔABC, đường cao AH, gọi I là trung điểm của trung tuyến AM. CMR:

a. $AB^2 - AC^2 = 2\,\overline{AB}.\overline{MH}$.

b. $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$.

Bài tập 4: Cho ΔABC đều cạnh bằng a, gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. CMR:

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 2a^4.$$

Bài tập 5: Cho 4 điểm M, A, B, C tuỳ ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

Bài tập 6: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

BÀI TOÁN 3

CHỨNG MINH TÍNH VUÔNG GÓC, THIẾT LẬP ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh tính vuông góc - Thiết lập điều kiện vuông góc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta dùng định lý:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \end{array}\right.$$

Ngoài ra, ta còn sử dụng các tính chất của tích vô hướng.

Chú ý: Nếu $\vec{a}(a_1, a_2)$ và $\vec{b}(b_1, b_2)$ thì điều kiện

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng trong tam giác ba đường cao đồng quy.

Giải

Gọi H là giao điểm của hai đường cao BB_1, CC_1 của ΔABC, để chứng minh ba đường cao trong ΔABC đồng quy, ta chứng minh $AH \perp BC$, thật vậy:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{HA}.(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{HB}.(\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{HC}.(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0.$$

Chú ý: Các em học sinh cần lưu ý, người ta có thể phát biểu bài toán dưới dạng khác để chuyển nó thành một bài thi, cụ thể đề thi ĐH Xây Dựng - 2000 yêu cầu:

"*Cho bốn điểm A, B, C, D. CMR nếu AB⊥CD và AD⊥BC thì AC⊥BD*".

Khi đó ta thấy ngay C chính là trực tâm ΔABD.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM⊥DE.

Giải

Ta chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = 0$, thật vậy:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}[AB.AE.\cos(90^\circ + A) - AC.AD.\cos(90^\circ + A)] = 0$$

vì AB.AE = AC.AD.

Vậy AM⊥DE, đpcm.

Chú ý: Với các yêu cầu chứng minh tính vuông góc dựa trên các đẳng thức độ dài, các em học sinh cần đặc biệt lưu ý tới biểu diễn $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$ để chuyển nó về dạng tích vô hướng. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho bốn điểm A, B, C, D. CMR AB⊥CD khi và chỉ khi

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$0 = (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2) + (\overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{AD}^2)$$

$$= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$$

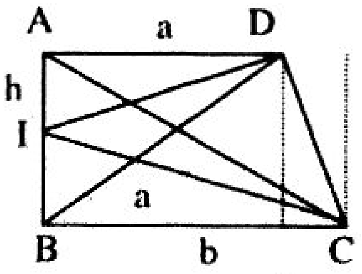
$$\Leftrightarrow AB \perp CD.$$

Ví dụ 4: Cho hình thang vuông ABCD, hai đáy AD = a, BC = b, đường cao AB = h. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h sao cho:

a. BD⊥CI, với I là trung điểm của AB.

b. AC⊥DI.

c. BM⊥CN, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AC và BD.



Giải

a. Ta có:

$$BD \perp CI \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CI} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{C_1A} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI} = -ab + h.\frac{h}{2}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 2ab.$$

b. Ta có:

$$AC \perp DI \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{D_1B} = h.\frac{h}{2} - ba$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 2ab.$$

c. Ta có:

$$BM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CN} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$$

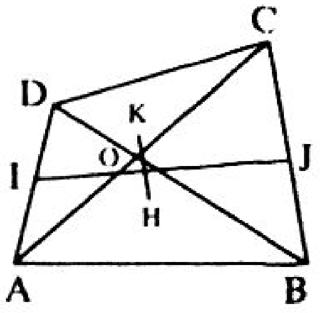
$$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$$

$$= -\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD_1} = -b^2 + h^2 - b(b - a) = -2b^2 + h^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 2b^2 - ab.$$

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABO và CDO. I, J là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng HK⊥IJ.

Giải



Ta có:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ},$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ},$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Xét:

$$\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK}).(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})]$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}).\overrightarrow{OA}]$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK}).\overrightarrow{OA}]$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow HK \perp IJ.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, gọi M là trung điểm BC. Lấy các điểm B_1, C_1 trên AB và AC sao cho $AB.AB_1 = AC.AC_1$. CMR $AM \perp B_1C_1$.

Bài tập 2: Cho ΔABC cân đỉnh A, đường cao AH. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM⊥BD.

Bài tập 3: Cho ΔABC cân đỉnh A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, M là trung điểm của AB, E là trọng tâm ΔACM. Chứng minh rằng $OE \perp CM$.

Bài tập 4: Cho ΔABC cân đỉnh A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp, gọi BB_1 và CC_1 là đường cao của tam giác. Chứng minh rằng $OA \perp B_1C_1$.

Bài tập 5: Cho ΔABC có các cạnh BC = a, CA = b, AB = c. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi H là điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

a. CMR H là trực tâm ΔABC.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c sao cho $OH \perp AM$, với M là trung điểm BC.

Bài tập 6: Cho ΔABC, biết $BC^2 + AC^2 = 5AB^2$. CMR hai trung tuyến AE và BF vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho hình thang vuông ABCD, hai đáy AB = a, CD = b, đường cao AD = h. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h sao cho:

a. $AC \perp BD$.

☐ $ab = h^2$. ☐ $ab = 2h^2$. ☐ Khác.

b. $BD \perp AM$, với M là trung điểm của BC.

☐ $a(a - b) = h^2$. ☐ $a(a + b) = h^2$. ☐ Khác.

Bài tập 8: (ĐH Giao Thông Vận Tải - 1998): Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn AB và góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ và $|\vec{a}| = a > |\vec{b}| = b$.

a. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BC}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

☐ $\overrightarrow{BC} = -\frac{b}{a}.\vec{a} + \vec{b}$. ☐ $\overrightarrow{BC} = \vec{a} - \frac{b}{a}.\vec{b}$. ☐ Khác.

b. Tìm mối quan hệ giữa $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ để $AC \perp BD$.

☐ $2a^2 - b^2 - 2ab = 0$. ☐ $2a^2 + b^2 + 2ab = 0$. ☐ Khác.

Bài tập 9: Cho 2 hình vuông ABCD và BKMN cùng có chung đỉnh B. CMR trung tuyến BE của ΔABN nằm trên đường thẳng chứa đường cao của ΔKBC.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Từ giả thiết suy ra

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC_1}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB_1}) = 0$$

$\Leftrightarrow AM \perp B_1C_1$.

Bài tập 2: Biểu diễn các vectơ dựa trên quan hệ vuông góc, cụ thể:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}) \text{ và } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

Chứng minh $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BD} = 0$ bằng việc sử dụng định lý hình chiếu.

Bài tập 3: Thiết lập biểu thức điều kiện và sử dụng định lý hình chiếu.

Bài tập 4:

a. Gọi M là trung điểm BC, ta được:

$OM \perp BC$.

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow AH // OM$$

suy ra $AH \perp BC$, tương tự ta cũng có $BH \perp CA$ và $CH \perp AB$.

Vậy H là trực tâm ΔABC.

b. Lưu ý O, H, G thẳng hàng với G là trọng tâm ΔABC.

Bài tập 5: Sử dụng định lý hình chiếu, ta được:

a. $ab = h^2$.

b. $a(a + b) = h^2$.

Bài tập 8:

a. $\overrightarrow{BC} = -\frac{b}{a}.\vec{a} + \vec{b}$.

b. $2a^2 - b^2 - 2ab = 0$.

BÀI TOÁN 4

SỬ DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG - ĐỊNH TÍNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán định lượng, định tính.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với các *bài toán định lượng*, ta sử dụng các kết quả:

   a. Gọi α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có:

   $$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}.$$

   b. Để tính độ dài đoạn AB, ta thực hiện:

   $$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

   rồi thực hiện phép phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ thành tổ hợp các vectơ cơ sở.

2. Với các *bài toán định tính*, ta biến đổi điều kiện ban đầu thành biểu thức của tích vô hướng, rồi từ đó dẫn tới

   $$\left[\begin{array}{l}\vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} /\!/ \vec{b}\end{array}\right.,$$

   từ đó đưa ra lời kết luận cho bài toán.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông cân tại A. Tính góc giữa 2 trung tuyến BE, CF.

Giải

Gọi α ($0 < \alpha \le 90^0$) là góc giữa BE và CF, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CF}|}{|\overrightarrow{BE}|.|\overrightarrow{CF}|}. \qquad (1)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CF} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) \\ &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} \\ &= -AB.\frac{AB}{2} - AC.\frac{AC}{2} = -AB^2. \qquad (2)\end{aligned}$$

$$BE = CF = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{AB^2 + \frac{AB^2}{4}} = AB.\sqrt{\frac{5}{4}}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Chú ý: Cũng có thể sử dụng phương pháp toạ độ hoá để giải bài toán trên bằng cách chọn hệ toạ độ vuông góc Axy với $B \in Ax$ và $C \in Ay$, khi đó:

$$A(0, 0), B(a, 0), C(0, a), E(0, \frac{a}{2}), F(\frac{a}{2}, 0),$$

suy ra:

$$\overrightarrow{BE}(-a, \frac{a}{2}), \overrightarrow{CF}(\frac{a}{2}, -a)$$

$$\Rightarrow BE = CF = a\sqrt{\frac{5}{4}} \text{ và } \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CF} = -a.\frac{a}{2} + \frac{a}{2}(-a) = -a^2,$$

Từ đó:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, có các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A và M là trung điểm BC. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c, từ đó suy ra AM và AD.

Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1), ta được:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2). \quad (2)$$

- Tính AM, ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (3)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (3), ta được:

$$AM^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{4}[c^2 + b^2 + 2.\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)] = \frac{1}{4}(2c^2 + 2b^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.$$

- Tính AD, ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD},$$

$$\frac{ab}{b+c}\overrightarrow{BD} + \frac{ac}{b+c}\overrightarrow{CD} = \vec{0},$$

suy ra:

$$(\frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c})\overrightarrow{AD} = \frac{ab}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{ac}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}. \qquad (4)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (4), ta được:

$$(b+c)^2AD^2 = (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})^2 = b^2AB^2 + c^2AC^2 + 2bc\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= b^2c^2 + c^2b^2 + 2bc.\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)] = bc(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= bc(b+c+a)(b+c-a) = 4bcp(p-a)$$

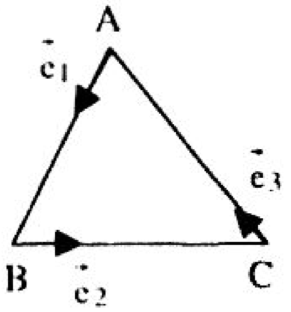
$$\Leftrightarrow AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}.$$

Giải

Lấy ba vectơ đơn vị $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ trên ba cạnh AB, BC, CA, ta có:



$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 1 + 1 + 2(\vec{e}_1.\vec{e}_2 + \vec{e}_2.\vec{e}_3 + \vec{e}_3.\vec{e}_1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2(-\cos B - \cos C - \cos A) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đồng dạng với tam giác có các cạnh là các vectơ đơn vị $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 4: Cho ΔABC vuông, có cạnh huyền $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm BC. Biết rằng:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}.$$

Tính độ dài AB và AC.

Giải

Từ giả thiết ta được;

$$\frac{a^2}{2} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{2}(AB^2 - AC^2)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = a^2. \qquad (1)$$

Mặt khác theo định lí Pitago, ta được:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (a\sqrt{3})^2 = 3a^2. \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), ta được $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a$.

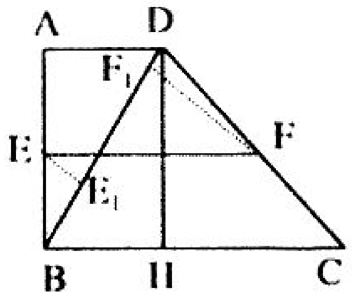
Ví dụ 5: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB. Biết rằng:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4,\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 9 \text{ và } \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = 6.$$

a. Tính độ dài các cạnh của hình thang.

b. Gọi EF là đường trung bình của hình thang, tính độ dài hình chiếu của EF lên BD.

Giải



a. Ta có:

$$4 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB^2 \Leftrightarrow AB = 2.$$

$$9 = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}).\overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} = CB^2 \Leftrightarrow CB = 3.$$

$$6 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}.(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD} = 9 - BC.AD = 9 - 3AD$$

$$\Leftrightarrow AD = 1.$$

Trong ΔHCD, ta có:

$$CD^2 = HC^2 + HD^2 = (BC - BH)^2 + AB^2 = (3 - 1)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow CD = 2\sqrt{2}.$$

b. Ta có:

$$BD.E_1F_1 = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{E_1F_1} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).\frac{1}{2}.(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

$$\Leftrightarrow E_1F_1 = \frac{2}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 6: Cho tứ giác ABCD, biết:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0. \qquad (1)$$

CMR ABCD là hình bình hành.

Giải

Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}.(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{array}\right.$$

⇔ ABCD là hình bình hành.

Ví dụ 7: Cho hình bình hành ABCD, biết rằng với mọi điểm M luôn có:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2. \qquad (1)$$

CMR ABCD là hình chữ nhật.

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, ta được:

$$2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}. \qquad (2)$$

Bình phương hai vế của (2), ta được:

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MB^2 + MD^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB})$$

$$\Leftrightarrow OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow AC = BD$$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, biết $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{u} - 2\vec{v}| = \sqrt{15}$.

a. Tính tích $\vec{u}.\vec{v}$.

☐ 1. ☐ $\frac{1}{2}$. ☐ Khác.

b. Xác định k để góc giữa hai vectơ $(\vec{u} + \vec{v})$ và $(k\vec{u} - \vec{v})$ bằng 60^0.

☐ $k = 8 + 3\sqrt{5}$. ☐ $k = 8 - 3\sqrt{5}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, có các cạnh BC = 2, CA = 4, AB = 5. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A và M là trung điểm BC. Tính AM và AD.

Bài tập 3: Cho ΔABC, có các cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A.

a. (Hệ thức Steward): CMR $c^2CM^2 = a^2AM^2 + b^2BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

b. Từ đó suy ra $AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

Bài tập 4: Cho hình vuông ABCD, trên AB lấy điểm P và dựng hình vuông AMNP ở ngoài ABCD. Tính góc giữa DP và CN.

☐ $\alpha = 45^0$. ☐ $\alpha = 60^0$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho tứ giác ABCD, biết:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 0, \text{ với } \forall M.$$

CMR ABCD là hình bình hành.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}$.

b. $k = 8 + 3\sqrt{5}$.

Bài tập 4: $\alpha = 45^0$.

BÀI TOÁN 5

ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HAY VỀ ĐỘ DÀI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tìm điểm M thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biến đổi biểu thức ban đầu về một trong các dạng sau:

Dạng 1: $AM^2 = k > 0$, với A cố định thì M thuộc đường tròn tâm A, bán kính $R = \sqrt{k}$.

Dạng 2: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$, với A, B cố định và k không đổi. Khi đó:

- Gọi I là trung điểm AB, ta được:

$$k = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow IM^2 = k + IA^2 = k + \frac{AB^2}{4} \overset{\text{Đặt}}{=} l.$$

- Khi đó:
  - Nếu $l < 0$ thì không tồn tại M.
  - Nếu $l = 0$ thì $M \equiv I$.
  - Nếu $l > 0$ thì M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{l}$.

Mở rộng: Nếu ta có $\overrightarrow{MA}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = k$, với A, A_i, $i = \overline{1,n}$ cố định, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ và k không đổi. Khi đó:

- Gọi K là điểm thoả mãn:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{KA_i} = \vec{0} \Rightarrow \text{tồn tại duy nhất điểm cố định K.}$$

- Từ đó:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MK}, \text{ với } \alpha = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

- Khi đó ta được:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MK} = \frac{k}{\alpha}.$$

Dạng 3: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = k$, với A, B, C cố định. Khi đó:

- Gọi M_0, A_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, A lên BC, ta được:

$$k = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overline{M_0A_0}.\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{M_0A_0} = \frac{k}{\overline{BC}},$$

có giá trị không đổi và do A_0 cố định nên M_0 cố định.

- Vậy điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với BC tại M_0. Đặc biệt khi k = 0 thì M thuộc đường thẳng qua A vuông góc với BC.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC đều, cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\frac{a^2}{4}. \qquad (1)$$

Giải

Gọi O là tâm ΔABC, ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2=3\overrightarrow{MO}^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2+2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA})=9MO^2. \ (2)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2\\&=3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2+2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).\overrightarrow{MO}\\&=3MO^2+a^2. \qquad (3)\end{aligned}$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=3MO^2-\frac{a^2}{2}. \qquad (4)$$

Khi đó (1) được chuyển về dạng:

$$3MO^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow MO^2=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow MO=\frac{a}{2}$$

⇔ M thuộc đường tròn tâm O bán kính $R=\frac{a}{2}$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})=0$.

b. $2MB^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=a^2$, với a = BC.

Giải

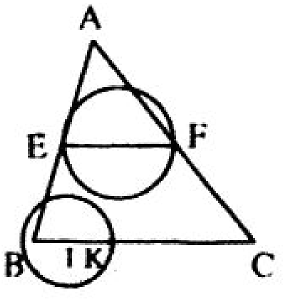
a. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm AB và AC.

Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$2\overrightarrow{ME}.2\overrightarrow{MF}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0\Leftrightarrow ME\perp MF$$

⇔ M nhìn EF dưới một góc vuông

⇔ M thuộc đường tròn đường kính EF.



b. Ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$a^2 = 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.(2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}). \qquad (1)$$

Gọi K là điểm thoả mãn:

$$2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{KB} + (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

tức là tồn tại duy nhất điểm K cố định và $KB = \frac{a}{3}$.

Khi đó:

$$2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (2+1)\overrightarrow{MK} = 3\overrightarrow{MK}.$$

Từ đó (1) có dạng:

$$a^2 = 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MK}.$$

Gọi I là trung điểm BK, ta được:

$$a^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IK}) = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB}) = 3(MI^2 - IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{BK^2}{4} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{36} = \frac{13a^2}{36}$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{a\sqrt{13}}{6}$$

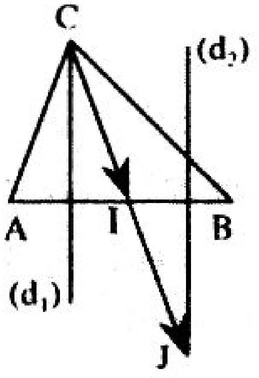
⇔ M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Ví dụ 3: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M, sao cho:

a. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$. (1)

b. $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$. (2)

Giải



a. Ta biến đổi (1) về dạng:

$$(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow CM \perp AB$$

⇔ M thuộc đường thẳng (d_1) qua C và vuông góc với AB.

b. Ta biến đổi (2) về dạng:

$$0 = (\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2) + (\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2)$$

$$= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}). \qquad (3)$$

Gọi I là trung điểm AB, ta biến đổi tiếp (3) về dạng:

$$0 = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{CI}). \qquad (4)$$

Dựng vectơ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CI}$, khi đó (4) có dạng:

$$0 = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MJ}$$

⇔ M thuộc đường thẳng (d_2) qua J và vuông góc với AB.

Ví dụ 4: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

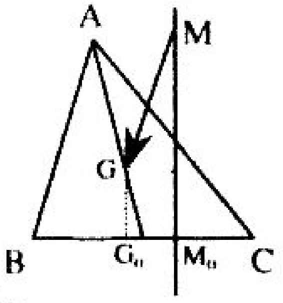
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = a^2 - MB^2 + MC^2, \text{ với } a = BC.$$

Giải

Ta biến đổi (1) về dạng:

$$a^2 = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

$$= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC} \qquad (3)$$



trong đó G là trọng tâm ΔABC, và gọi M_0, G_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, G lên BC, ta được:

$$3\overline{M_0G_0}.\overline{BC} = a^2 \Leftrightarrow \overline{M_0G_0} = \frac{a}{3}$$

do G_0 cố định nên M_0 cố định.

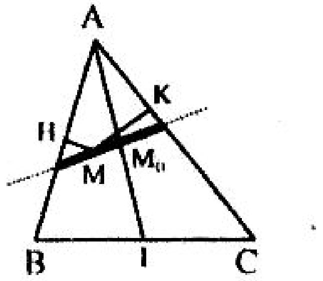
Vậy điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với BC tại M_0.

Ví dụ 5: Cho ΔABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$, sao cho:

$$AB.AH + AC.AK = AI^2. \qquad (1)$$

trong đó H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

Giải



Sử dụng tính chất hình chiếu, ta biến đổi (1) về dạng:

$$\overrightarrow{AI}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM}. \qquad (2)$$

Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M lên AI, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow AI^2 = 2\overline{AI}.\overline{AM_0} \Leftrightarrow \overline{AM_0} = \frac{AI}{2}$$

$\Leftrightarrow M_0$ là trung điểm AI.

Vậy điểm M thuộc đoạn trung trực của AI nằm trong góc $\widehat{BAC}$.

Ví dụ 6: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M, sao cho:

$$MA^2 - MB^2 = k. \qquad (1)$$

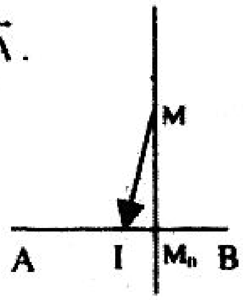
Giải

Gọi I là trung điểm AB, ta biến đổi (1) về dạng:

$$k = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}.$$

Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M lên AB, ta được:

$$k = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = \overline{M_0I}.\overline{BA} \Leftrightarrow \overline{M_0I} = \frac{k}{BA},$$



có giá trị không đổi và do I cố định nên M_0 cố định.

Vậy điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với AB tại M_0.

Nhận xét: Thông qua ví dụ trên, chúng ta đã biết cách giải bài toán:

"Tìm tập hợp điểm M thoả mãn:

$$\alpha MA^2+\beta MB^2=k, \qquad (1)$$

với A, B cố định, $\alpha+\beta=0$ và k không đổi."

Trong trường hợp $\alpha+\beta\neq 0$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là điểm thoả mãn

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA})+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{IB}=\alpha\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy tồn tại duy nhất một điểm I cố định.

Bước 2: Ta biến đổi (1) về dạng:

$$k=\alpha\overrightarrow{MA}^2+\beta\overrightarrow{MB}^2=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$

$$=(\alpha+\beta)MI^2+\alpha IA^2+\beta IB^2+2(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}).\overrightarrow{MI}$$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{1}{\alpha+\beta}[k-(\alpha IA^2+\beta IB^2)]\overset{\text{Đặt}}{=}l.$$

Bước 3: Biện luận:

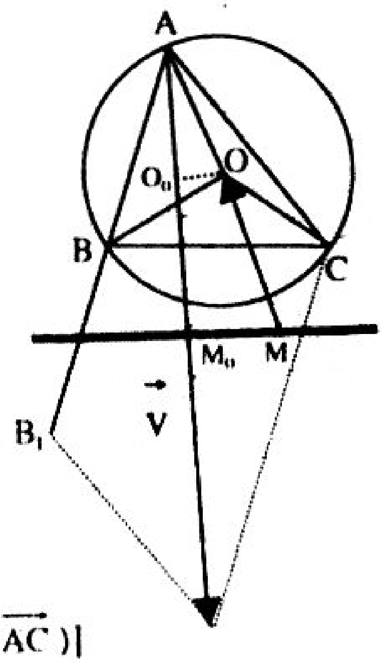
- Với $l<0$, không tồn tại điểm M.
- Với $l=0$, thì $M\equiv I$.
- Với $l>0$, thì M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{l}$.

Ví dụ 7: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M, sao cho:

$$3MA^2-2MB^2-MC^2=2l. \qquad (1)$$

Giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:



$$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2$$

$$=MO^2+OA^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA},$$

$$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2$$

$$=MO^2+OB^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB},$$

$$MC^2=\overrightarrow{MC}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2$$

$$=MO^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC},$$

từ đó suy ra (1) được biến đổi về dạng:

$$2l=2\overrightarrow{MO}.(3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$$

$$=2\overrightarrow{MO}.[3\overrightarrow{OA}-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})]$$

$$=-2\overrightarrow{MO}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}). \qquad (2)$$

Dựng vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và gọi M_0, O_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, O lên đường thẳng chứa vectơ $\vec{v}$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow l = \overrightarrow{MO}.\vec{v} = \overline{M_0O_0}.\bar{v} \Leftrightarrow \overline{M_0O_0} = \frac{l}{v}$$

có giá trị không đổi và do O_0 cố định nên M_0 cố định.

Vậy M thuộc đường thẳng qua M_0 vuông góc với $\vec{v}$.

Nhận xét: Thông qua ví dụ trên, chúng ta đã biết cách giải bài toán:

"Tìm tập hợp điểm M thoả mãn:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k, \qquad (1)$$

với A, B, C cố định, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ và k không đổi."

Trong trường hợp $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi I là điểm thoả mãn

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Khi đó tồn tại duy nhất một điểm I cố định.

Bước 2: Ta biến đổi (1) về dạng:

$$k = \alpha\overrightarrow{MA}^2 + \beta\overrightarrow{MB}^2 + \gamma\overrightarrow{IC}^2$$

$$= \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + \gamma(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 + 2(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC}).\overrightarrow{MI}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}[k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)] \overset{\text{Đặt}}{=} l.$$

Bước 3: Biện luận:

- Với $l < 0$, không tồn tại điểm M.
- Với $l = 0$, thì $M \equiv I$.
- Với $l > 0$, thì M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{l}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.

b. $4MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0$.

c. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} = 0$.

d. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + BC^2$.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông cân tại B, AB = a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$.

b. $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) = 0$, với điểm I thoả mãn ABCI là hình vuông.

Bài tập 3: Cho ΔABC đều, cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a. $MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 0$.

b. $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = a^2$.

Bài tập 4: Cho ΔABC. Biện luận theo k tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = k.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC. Biện luận theo k tập hợp những điểm M thoả mãn:

a. $MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

b. $2MA^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

c. $2MA^2 - MB^2 = k$.

d. $MA^2 + 2MB^2 = k$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$, sao cho:

$$AB.AK + AC.AH = AI^2.$$

trong đó H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD. Biện luận theo k tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k.$$

Bài tập 8: Cho góc xOy. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc đó, sao cho độ dài hình chiếu của đoạn OM lên Ox gấp bốn lần độ dài hình chiếu của đoạn OM lên Oy.

BÀI TOÁN 6

SỬ DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán cực trị.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng tích vô hướng biến đổi biểu thức cần tìm cực trị về biểu thức độ dài, thí dụ:

$$S = MI^2 + c, \text{ với c là hằng số và I cố định.}$$

Khi đó $S_{Min} = c$, đạt được khi

$$MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, G là trọng tâm và M là điểm tuỳ ý.

a. CMR $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b. CMR $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$, từ đó suy ra vị trí của M để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) +$$

$$+ \overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 0, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}, \quad (1)$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}, \quad (2)$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + \overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Từ đó suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$MG^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv G.$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD, tâm O, M là điểm tuỳ ý.

a. CMR $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2(OB^2 - OA^2)$.

b. Giả sử M di động trên đường tròn (d), xác định vị trí của M để $MA^2 - MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 + 2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}) \qquad (1)$$

Ta xét:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}) \\ &= -(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM}) \\ &= -OA^2 + OM^2 + OB^2 - OM^2 = OB^2 - OA^2. \qquad (2) \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$0 = MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 + 2(OB^2 - OA^2)$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2(OB^2 - OA^2), \text{ đpcm.}$$

b. Từ kết quả câu a) suy ra $MA^2 - MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MD^2 nhỏ nhất

⇔ M là hình chiếu vuông góc của D lên (d).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC đều cạnh bằng 6, M là điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Đặt

$$S = MA^2 - MB^2 - MC^2.$$

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của S.

☐ $-2a^2$. ☐ $2a^2$. ☐ Khác.

b. Tìm giá trị lớn nhất của S.

☐ $\frac{a^2}{3}$. ☐ $\frac{2a^2}{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, G là trọng tâm và M là điểm tuỳ ý.

a. CMR vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

b. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, chứng minh rằng:

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MO}.\vec{v}$$

c. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$.

d. Giả sử M di động trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, tìm vị trí của M để $MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $S_{Min} = -2a^2$ và $S_{Max} = \frac{2a^2}{3}$.

BÀI TOÁN 7

SỬ DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Sử dụng tích vô hướng chứng minh bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha$, với $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$,

và bởi $|\cos\alpha| \le 1$, do đó:

$|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC. CMR

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}.$$

Giải

Thiết lập các vectơ đơn vị $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC, ta được:

$$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = |\overrightarrow{e_1}|.|\overrightarrow{e_2}|.\cos(180^0 - B) = -\cos B,$$

$$\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3} = |\overrightarrow{e_2}|.|\overrightarrow{e_3}|.\cos(180^0 - C) = -\cos C,$$

$$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_3} = |\overrightarrow{e_1}|.|\overrightarrow{e_3}|.\cos(180^0 - A) = -\cos A.$$

Mặt khác ta luôn có:

$$0 \le (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})^2 = \overrightarrow{e_1}^2 + \overrightarrow{e_2}^2 + \overrightarrow{e_3}^2 + 2(\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_3})$$

$$= 3 + 2(-\cos B - \cos C - \cos A)$$

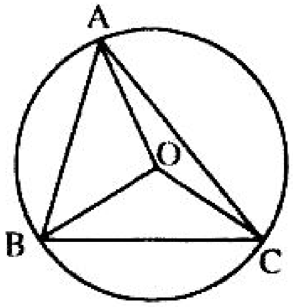
$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$, đpcm.

Ví dụ 2: Cho ΔABC. CMR

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}.$$

Giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta nhận được:



$2\hat{A} = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$,

$2\hat{B} = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$,

$2\hat{C} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Mặt khác:

$$0 \le (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 +$$

$$+ 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})$$

$$= 3R^2 + 2(R^2.\cos 2C + R^2.\cos 2A + R^2.\cos 2B)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$$, đpcm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. CMR

a. $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C \le \frac{3}{2}$.

b. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \le \frac{3}{2}$.

Bài tập 2: Cho ΔABC. CMR

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}.$$

Bài tập 3: CMR

a. $\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{2(i-1)\pi}{n} = 0$.

b. $\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{2(i-1)\pi}{n} = 0$.

BÀI TOÁN 8

BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Sử dụng biểu thức toạ độ của tích vô hướng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng kết quả: Nếu $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ và α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì:

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.
- $\cos\alpha = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai vectơ $\vec{a}(1, 1)$ và $\vec{b}(2, 1)$.

a. Tính cos, sin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b. Hãy xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết rằng:

$$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = -1 \text{ và } (\vec{a} + 2\vec{c}).\vec{b} = 1.$$

Giải

a. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta được:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{1.2 + 1.1}{\sqrt{1+1}.\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

b. Giả sử $\vec{c}(x, y)$, từ giả thiết suy ra:

$$-1 = (\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = (3, 2)(x, y) = 3x + 2y. \quad (1)$$

$$1 = (\vec{a} + 2\vec{c}).\vec{b} = (1 + 2x, 1 + 2y)(2, 1) = 2(1 + 2x) + 1 + 2y$$

$$\Leftrightarrow 2x + y = -1. \quad (2)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1) và (2), ta được:

$$x = -1 \text{ và } y = 1 \Rightarrow \vec{c}(-1, 1).$$

Ví dụ 2: Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định:

$$(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}).$$

Giải

Giả sử $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, từ giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \\ \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \\ a_1.b_1 + a_2.b_2 = 1 \end{cases}.$$

Ta có:

$$(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = (3a_1 - 4b_1, 3a_2 - 4b_2).(2a_1 + 5b_1, 2a_2 + 5b_2)$$
$$= (3a_1 - 4b_1)(2a_1 + 5b_1) + (3a_2 - 4b_2)(2a_2 + 5b_2)$$
$$= 6(a_1^2 + a_2^2) - 20(b_1^2 + b_2^2) + 7(a_1b_1 + a_2b_2)$$
$$= 6 - 20 + 7 = -7.$$

Chú ý: Bài toán trên cũng có thể giải bằng tích vô hướng thuần tuý, cụ thể:

Từ giải thiết, suy ra:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = 4 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 1.$$

Ta có:

$$(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a}.\vec{b} = 6 - 20 + 7 = -7.$$

Như vậy lời giải trên đơn giản hơn nhiều so với việc toạ độ hoá, từ đó các em học sinh cần hiểu rằng mục đích chính của nhiều ví dụ chỉ mang tính minh hoạ.

Ví dụ 3: Cho hai điểm A(3, 1), B(4, 2). Tìm toạ độ điểm M sao cho:

$$AM = 2 \text{ và } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 135^0.$$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}(1, 1)$.

Giả sử M(x, y), suy ra $\overrightarrow{AM}(x - 3, y - 1)$

Khi đó: $AM = 2 \Leftrightarrow AM^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4.$ (1)

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 135^0 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AM}|} = \cos 135^0 \Leftrightarrow \frac{x - 3 + 5(y - 1)}{2\sqrt{1 + 1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow x + 5y - 8 = -2 \Leftrightarrow x = 6 - 5y.$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được:

$$(6 - 5y - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow 13y^2 - 16y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{3}{13} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ và } y = 1 \\ x = \dfrac{63}{13} \text{ và } y = \dfrac{3}{13} \end{array}\right..$$

Vậy tồn tại hai điểm $M_1(1, 1)$ và $M_2(\frac{63}{13}, \frac{3}{13})$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: Cho ba điểm A(7, 4), B(0, 3), C(4, 0). Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên BC, từ đó suy ra toạ độ điểm A_1 là điểm đối xứng với A qua BC.

Giải

H(x, y) là hình chiếu vuông góc của A lên BC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \,//\, \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \,//\, \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 7, y - 4).(4, -3) = 0 \\ (x, y - 3) \,//\, (4, -3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 7) - 3(y - 4) = 0 \\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y - 3}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy H(4, 0).

Điểm A_1 là điểm đối xứng với A qua BC

$\Leftrightarrow$ H là trung điểm $AA_1 \Leftrightarrow A_1(1, -4)$.

Ví dụ 5: (Đề 22-Va): Trên mặt phẳng toạ độ cho điểm A(1, 1). Hãy tìm điểm B có tung độ bằng 3, và điểm C trên trục hoành sao cho ΔABC đều.

Giải

Ta có

$B(x_B, 3)$,

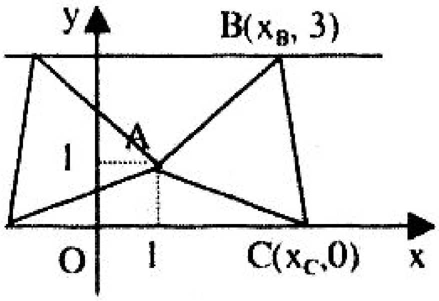
C thuộc Ox $\Rightarrow C(x_C, 0)$.

Vậy, ΔABC đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_C - 1)^2 - (x_B - 1)^2 = 3 \\ \dfrac{(x_B - 1)(x_C - 1) - 2}{(x_B - 1)^2 + 4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Đặt

$$\begin{cases} x_B - 1 = u \\ x_C - 1 = v \end{cases}.$$



Hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} v^2 - u^2 = 3 & (1) \\ u^2 - 2u.v + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

Đặt v = ku, (3) có dạng:

$$8k^2 - 6k - 5 = 0 \Leftrightarrow k_1 = \frac{5}{4} \text{ hoặc } k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Với $k_2 = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow v = -\dfrac{1}{2}u$, thay vào (1), vô nghiệm.

Với $k_1 = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow v = \dfrac{5}{4}u$, thay vào (1) được

$$\left[\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ u_2 = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad v_1 = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ u_2 = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad v_2 = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_B = \dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{3} \quad \text{và} \quad x_C = \dfrac{3 + 5\sqrt{3}}{3} \\ x_B = \dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{3} \quad \text{và} \quad x_C = \dfrac{3 - 5\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B(\dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{3}, 3) \quad \text{và} \quad C(\dfrac{3 + 5\sqrt{3}}{3}, 0) \\ B(\dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{3}, 3) \quad \text{và} \quad C(\dfrac{3 - 5\sqrt{3}}{3}, 0) \end{array}\right.$$

Vậy tồn tại hai cặp điểm B, C để ΔABC đều.

Chú ý: Có thể giải bằng cách thiết lập điều kiện ΔABC đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Cho ΔABC, biết $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -1)$.

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b. Tính cos và sin góc A.

c. Tìm toạ độ chân đường cao A_1 của ΔABC.

d. Tìm toạ độ trực tâm H của ΔABC.

e. Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.

f. Tìm toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, từ đó chứng minh rằng I, H, G thẳng hàng.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}(-2, -1),\ \overrightarrow{AC}(4, -3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2.4 - 1.(-3) = -5.$$

b. Ta có:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-5}{\sqrt{5}.\sqrt{25}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

c. $A_1(x, y)$ là chân đường cao từ đỉnh A của ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA_1} \,//\, \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \,//\, \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1, y - 2).(6, -2) = 0 \\ (x + 1, y - 1) \,//\, (6, -2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x - 1) - 2(y - 2) = 0 \\ \dfrac{x + 1}{6} = \dfrac{y - 1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy $A_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

d. $H(x, y)$ là trực tâm H của ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1, y - 2).(6, -2) = 0 \\ (x + 1, y - 1).(4, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy $H(2, 5)$.

e. Toạ độ trọng tâm $G(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.

f. $I(x, y)$ là tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Leftrightarrow AI = BI = CI \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-1)^2\\(x-1)^2+(y-2)^2=(x-5)^2+(y+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

Vậy $I(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

Nhận xét rằng

$\overrightarrow{GH}(\frac{1}{3}, \frac{13}{3})$ và $\overrightarrow{IH}(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}) \Rightarrow$ I, H, G thẳng hàng.

Ví dụ 7: Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0. \qquad (1)$$

Giải

Giả sử $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, khi đó ta cần tìm tập hợp những điểm $M(x, y)$ thoả mãn (1).

Từ (1), ta được:

$$0 = (x_A - x, y_A - y).(x_B - x, y_B - y) + (x_B - x, y_B - y).(x_C - x, y_C - y) + $$
$$+ (x_C - x, y_C - y).(x_A - x, y_A - y)$$
$$= (x_A - x).(x_B - x) + (y_A - y).(y_B - y) + (x_B - x).(x_C - x) +$$
$$+ (y_B - y).(y_C - y) + (x_C - x).(x_A - x) + (y_C - y).(y_A - y)$$
$$= 3(x^2 + y^2) - 2x(x_A + x_B + x_C) - 2x(y_A + y_B + y_C) +$$
$$+ x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A + y_Ay_B + y_By_C + y_Cy_A$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{18}\{[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2] + [(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2] +$$
$$+ [(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]\}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{18}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm G (là trọng tâm ΔABC), bán kính $R = \dfrac{\sqrt{AB^2 + BC^2 + CA^2}}{3\sqrt{2}}$.

Chú ý: Cũng như ví dụ 2, phương pháp trên chỉ mang tính minh hoạ, bởi trong trường hợp tổng quát phương pháp này tỏ ra không hiệu quả.

Ví dụ 8: (Đề 15-Va): Cho 5 điểm $A(0, -1)$, $B(2, 3)$, $C(\frac{1}{2}, 0)$, $E(1, 6)$, $F(-3, -4)$.

a. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng. Tìm điểm D sao cho bốn điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà.

b. Tìm điểm M trên AB sao cho vectơ $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}$ có độ dài nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{CA}\left(-\frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{CB}\left(\frac{3}{2}, 3\right) \Rightarrow \overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \text{A, B, C thẳng hàng}$$

Giả sử D(x, y), khi đó bốn điểm A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hoà

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DA}$$

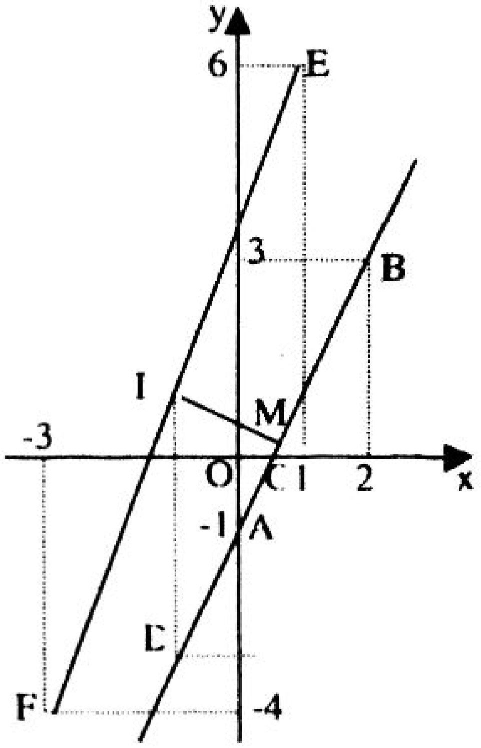
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = 3(-x) \\ 3 - y = 3(-1 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow D(-1, -3).$$

b. Ta có:

- M(x, y)∈ AB

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y+1}{4} \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow M(x, 2x - 1).$$

- Gọi I là trung điểm EF, ta có I(−1, 1).



Khi đó:

$$\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM} = 2\overrightarrow{IM} \Rightarrow |\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}| = 2|\overrightarrow{IM}|$$

Suy ra $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow 2|\overrightarrow{IM}|$ nhỏ nhất ⇔ IM nhỏ nhất.

Cách 1: IM nhỏ nhất

⇔ M là hình chiếu vuông góc của I lên (d)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 1) + 4(2x - 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

Vậy toạ độ của $M(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$.

Cách 2: Ta có:

$$IM^2 = (x + 1)^2 + (2x - 1 - 1)^2 = 5x^2 - 6x + 5 \geq \frac{4}{5}$$

Vậy $IM^2_{min} = \frac{4}{5}$ đạt được khi $x = \frac{3}{5} \Rightarrow M(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai vectơ $\vec{a}(1, 2)$ và $\vec{b}(-1, 1)$. Xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$ biết:

$\vec{a}.\vec{c} = 4$ và $\vec{b}.\vec{c} = -1$.

☐ $\vec{c}(1, 2)$. ☐ $\vec{c}(2, 1)$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$. Hãy xác định:

$$A = (\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b}).$$

☐ $A = \frac{53}{2}$. ☐ $A = 26$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ba điểm A(3, −1), B(−4, 0), C(8, 9). Tìm toạ độ

a. Hình chiếu vuông góc H của A lên BC

☐ H(1, 3). ☐ H(0, 3). ☐ Khác.

b. Điểm A_1 là điểm đối xứng với A qua BC.

☐ $A_1(-3, 7)$. ☐ $A_1(3, 2)$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết A(1, 2), B(−2, 6), C(4, 2).

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -9$. ☐ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -5$. ☐ Khác.

b. Tính cos và sin góc A.

☐ $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\sin A = -\frac{3}{5}$ ☐ $\cos A = -\frac{3}{5}$ và $\sin A = \frac{4}{5}$ ☐ Khác.

c. Tìm toạ độ chân đường cao A_1 của ΔABC.

☐ $A_1(\frac{44}{13}, \frac{25}{13})$. ☐ $A_1(\frac{25}{13}, \frac{44}{13})$. ☐ Khác.

d. Tìm toạ độ trực tâm H của ΔABC.

☐ $H(-2, -\frac{5}{2})$. ☐ $H(2, -\frac{5}{2})$. ☐ Khác.

e. Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.

☐ $G(1, \frac{10}{3})$. ☐ $G(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. ☐ Khác.

f. Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, từ đó chứng minh rằng I, H, G thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho ba điểm A(4, 3), B(2, 7), C(−3, −8).

a. Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm T của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b. CMR T, G, H thẳng hàng.

c. Tính diện tích ΔABC.

Bài tập 6: Cho ΔABC, biết A(1, 3), B(5, 1), C(−3, −1).

a. Tìm toạ độ trực tâm H của ΔABC.

☐ $H(\frac{13}{3}, -\frac{31}{3})$. ☐ $H(\frac{13}{3}, \frac{1}{3})$. ☐ Khác.

b. Tìm toạ độ điểm K đối xứng với H qua BC.

☐ $K(-\frac{47}{51}, \frac{545}{51})$. ☐ $K(\frac{47}{51}, \frac{545}{51})$. ☐ Khác.

Bài tập 7: (Đề 86 - Va): Diện tích ΔABC là $S = \frac{3}{2}$; hai đỉnh $A(2, -3)$, $B(3, -2)$ và trọng tâm G của tam giác có toạ độ thoả mãn $G(t, 3t - 8)$. Tìm toạ độ đỉnh C.

☐ $C(1, -1)$. ☐ $C(-2, -10)$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $\vec{c}(1, 2)$.

Bài tập 2: $A = -\frac{53}{2}$.

Bài tập 3: $H(0, 3)$ và $A_1(-3, 7)$.

Bài tập 4:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -9$.

b. $\cos A = -\frac{3}{5}$ và $\sin A = \frac{4}{5}$

c. $A_1(\frac{25}{13}, \frac{44}{13})$.

d. $G(1, \frac{10}{3})$.

Bài tập 5: Tương tự bài 4.

Bài tập 6: $H(\frac{13}{3}, -\frac{31}{3})$ và $K(-\frac{47}{51}, \frac{545}{51})$.

Bài tập 7: Tồn tại hai điểm $C_1(1, -1)$, $C_2(-2, -10)$.

CHỦ ĐỀ 3

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng:

- Các cạnh là a, b, c.
- Các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c.
- Các đường cao h_a, h_b, h_c.
- Các đường phân giác l_a, l_b, l_c.

Ta có các hệ thức sau:

1. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

2. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ SIN

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

3. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

- $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$,
- $c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$,
- $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$.

4. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Phân giác trong

- $l_A = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,
- $l_B = \dfrac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}$,
- $l_C = \dfrac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

Phân giác ngoài

- $l'_A = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{|b-c|}$,
- $l'_B = \dfrac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{|a-c|}$,
- $l'_C = \dfrac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{|a-b|}$.

5. CÔNG THỨC VỀ DIỆN TÍCH

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

- $S = \dfrac{abc}{4R}$

- $S = pr = p(p-a)\text{tg}\dfrac{A}{2} = p(p-b)\text{tg}\dfrac{B}{2} = p(p-c)\text{tg}\dfrac{C}{2}$.

  với p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp)

- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

6. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

7. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

$$r = \frac{S}{p},$$

$$r = (p-a)\,\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\,\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\,\text{tg}\frac{C}{2}.$$

BÀI TOÁN 1

ĐỊNH LÝ COSIN TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Định lý cosin trong tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng với các cạnh là a, b, c. Theo định lý hàm số cosin ta có:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Xác định tính chất góc trong tam giác là nhọn, vuông, tù, dựa trên lập luận:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Khi đó:

- Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow 2bc\cos A > 0 \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow$ A nhọn.
- Nếu $b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow 2bc\cos A = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow$ A vuông.
- Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow 2bc\cos A < 0 \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow$ A tù.

Dạng 3: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3} + 1$. Tính các góc A, B, C và đường cao h_a của tam giác.

Giải

Trong ΔABC, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow B = 45^0.$$

Mặt khác trong ΔABC, ta có:

$$A + B + C = 180^0 \Leftrightarrow C = 180^0 - A - B = 75^0.$$

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}h_a.a = \frac{1}{2}b.c.\sin A \Leftrightarrow h_a = \frac{bc.\sin A}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

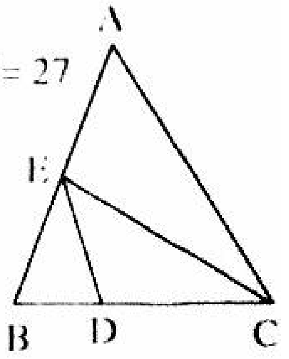
Ví dụ 2: Cho ΔABC, biết AB = 3, AC = 6 và $\hat{A} = 60^0$. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc BC, AB sao cho BC = 3BD, AE = DE.

a. Tính độ dài cạnh BC và các góc B, C.

b. Tính độ dài đoạn CE.

Giải

a. Trong ΔABC, ta có:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 9 + 36 - 2.3.6.\cos 60^0 = 27$$

$$\Leftrightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow C = 30^0.$$

$$A + B + C = 180^0 \Leftrightarrow B = 180^0 - A - C = 90^0.$$

Nhận xét: Nếu các em học sinh lưu ý được sau khi tính BC, ta có:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại B}$$

thì việc xác định số đo các góc B, C sẽ thực sự giản đơn.

b. Trong ΔBDE, ta có:

$$DE^2 = BE^2 + BD^2 = (AB - AE)^2 + BD^2 = (3 - DE)^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 - 6DE + DE^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow DE = 2.$$

Trong ΔACE, ta có:

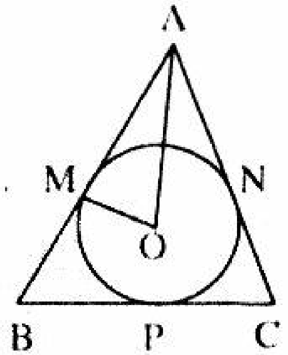
$$CE^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE.AC.\cos A = 4 + 36 - 2.2.6.\cos 60^0 = 28 \Leftrightarrow CE = 2\sqrt{7}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết $AB + AC = 13$, $AB > AC$, $A = 60^0$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng $\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

Giải

Ta có $AB = c$, $AC = b$, khi đó từ giả thiết ta được:

$$b + c = 13. \qquad (1)$$



Gọi M, N, P là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, AC, BC. Ta được:

$$AM = AN,\ BM = BP \text{ và } CN = CP.$$

Trong ΔMAO, ta có:

$$AM = OM.\text{cotg}\frac{A}{2} = \sqrt{3}.\text{cotg}30^0 = 3 = AN.$$

Ta có:

$$BC = BP + PC = BM + CN = AB - AM) + (AC - AN)$$
$$= (AB + AC) - (AM + AN) = 13 - 6 = 7.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$

$$\Leftrightarrow 49 = c^2 + b^2 - 2cb.\cos 60^0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = 49. \qquad (2)$$

Xét hệ phương trình tạo bởi (1), (2):

$$\begin{cases} b^2 + c^2 - bc = 49 \\ b + c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 8 \end{cases}.$$

Vậy độ dài ba cạnh của ΔABC là $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có $a = 3$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 5$. CMR ΔABC có một góc tù.

Giải

Trong ΔABC có cạnh $c = 5$ là cạnh lớn nhất trong ba cạnh, nên góc C là lớn nhất, do đó chỉ cần xét góc C.

Ta có

$$b^2 + c^2 - a^2 = 9 + 12 - 25 = -4 < 0$$

Vậy góc C tù.

Ví dụ 5: Cho ΔABC, có $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$, $AC = \sqrt{a^2 + c^2}$ với a, b, c là ba độ dài cho trước. Chứng minh rằng ΔABC nhọn.

Giải

Ta có:

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2) = 2a^2 > 0 \Leftrightarrow \text{góc A nhọn.}$$

Tương tự góc B, C nhọn.

Ví dụ 6: Cho ΔABC, cạnh a, b, c và $\widehat{A} = 60^0$. CMR:

$$b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2).$$

Giải

Ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 + c^2 - bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2b + a^2c = b^3 + c^3 \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 \Leftrightarrow b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2), \text{ dpcm.}$$

Chú ý: Như vậy chúng ta hoàn toàn có thể mở rộng bài toán trên theo chiều ngược lại, tức là:

"Cho một hệ thức liên hệ giữa các yếu tố trong tam giác, hãy xác định số đo góc nói riêng và các yếu tố của tam giác nói chung".

Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 7: Tính góc C của ΔABC biết:

$$c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0.$$

Giải

Đặt $t = c^2$, $t > 0$.

Khi đó đẳng thức điều kiện được viết lại dưới dạng phương trình bậc hai theo t như sau:

$$t^2 - 2(a^2 + b^2)t + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0. \qquad (1)$$

Ta có

$$\Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + a^2b^2 + b^4) = a^2b^2 > 0$$

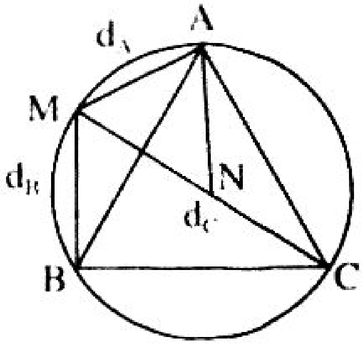
do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} t = a^2 + b^2 - ab \\ t = a^2 + b^2 + ab \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 - ab \\ c^2 = a^2 + b^2 + ab \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos C = \dfrac{1}{2} \\ \cos C = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 60^0 \\ C = 120^0 \end{array}\right.$$

Ví dụ 8: Cho ΔABC đều cạnh bằng a. M là điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. CMR:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2.$$

Giải



Lấy điểm N trên MC sao cho:

$MA = MN$,

khi đó ΔAMN là tam giác đều.

Mặt khác ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\widehat{MBA} = \widehat{MCA} \text{ chắn 1 cung} \\ \widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 120^0\end{cases} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NAC}.$$

từ đó suy ra:

$$\Delta MAB = \Delta NAC \Rightarrow MB = NC$$

khi đó:

$$MC = MN + NC = MA + MB.$$

Như vậy:

$$\begin{aligned}MA^2 + MB^2 + MC^2 &= MA^2 + MB^2 + (MA + MB)^2 \\ &= 2(MA^2 + MB^2 + MA.MB). \qquad (1)\end{aligned}$$

Trong ΔMAB, ta có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos M \Leftrightarrow a^2 = MA^2 + MB^2 + MA.MB. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$, dpcm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

a. Tính các góc A, B, C

☐ $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 105^0$, $\hat{C} = 45^0$ ☐ $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 45^0$, $\hat{C} = 105^0$

b. Tính đường cao h_a.

☐ $h_a = \sqrt{3} + 1$. ☐ $h_a = \sqrt{3} - 1$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết $AB = 3$, $AC = 9$ và $\hat{A} = 60^0$. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc BC, AB sao cho $BC = 3BD$, $AE = DE$.

a. Tính độ dài cạnh BC, từ đó suy ra cosin các góc B, C.

☐ $BC = 3\sqrt{7}$. ☐ $BC = 3\sqrt{2}$. ☐ Khác.

b. Tính độ dài đoạn CE.

☐ $CE = \dfrac{\sqrt{91}}{3}$. ☐ $CE = \dfrac{\sqrt{71}}{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính BC.

☐ $BC = \sqrt{13}$. ☐ $BC = \sqrt{37}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết $AB + AC = 42$, $AB > AC$, $\hat{A} = 120^0$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng $2\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

☐ $BC = 38$, $CA = 32$, $AB = 10$. ☐ $BC = 36$, $CA = 34$, $AB = 12$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, biết

$$b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2).$$

Tính góc A của ΔABC.

☐ $\widehat{A}=60^0$. ☐ $\widehat{A}=120^0$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho ΔABC có $a=2$, $b=4$, $c=5$. Chứng minh ΔABC có một góc tù.

☐ A tù. ☐ B tù. ☐ C tù.

Bài tập 7: Cho ΔABC có $a^4=b^4+c^4$. Chứng minh ΔABC nhọn.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $\widehat{A}=60^0$, $\widehat{B}=45^0$, $\widehat{C}=105^0$, $h_a=\sqrt{3}+1$.

Bài tập 2: $BC=3\sqrt{7}$, $CE=\dfrac{\sqrt{91}}{3}$.

Bài tập 3: $BC=\sqrt{13}$ hoặc $BC=\sqrt{37}$.

Bài tập 4: BC = 38, CA = 32, AB = 10.

Bài tập 5: $A=120^0$.

Bài tập 6: C tù.

Bài tập 7: Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} a>b \\ a>c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A>B \\ A>C \end{cases}.$$

Do đó để chứng minh ΔABC nhọn, ta chỉ cần chứng minh góc A nhọn

$$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2>0 \Leftrightarrow b^2+c^2>a^2 \Leftrightarrow (b^2+c^2)^2>a^4 \Leftrightarrow b^4+c^4+2b^2.c^2>a^4$$

$$\Leftrightarrow a^4+2b^2.c^2>a^4 \Leftrightarrow b^2.c^2>0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy ΔABC nhọn.

BÀI TOÁN 2

ĐỊNH LÝ SIN TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Định lý sin trong tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng với các cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Dựa vào kết quả trên ta có thể giải được các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Dạng 3: Nhận dạng tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính đường cao h_a và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác.

Giải

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}h_a.a = \frac{1}{2}bc.\sin A \Leftrightarrow h_a = \frac{b.c.\sin A}{a}. \qquad (1)$$

trong đó b, c đã biết và:

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin A = \frac{4}{5}. \qquad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 49 + 25 - 2.7.5.\frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Ta tính R bằng định lý hàm số sin:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 3$, $AC = 4$. Gọi M là trung điểm AC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMBC.

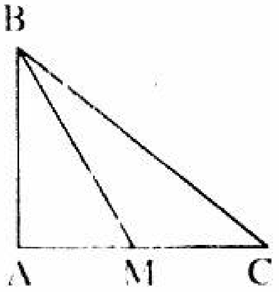
Giải

Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔBMC, ta có:

$$R_{BMC} = \frac{BM}{2\sin C}. \qquad (1)$$

Trong ΔABM, ta có:

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}. \quad (2)$$



Trong ΔABC:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{3}{5}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$R_{BMC} = \frac{5\sqrt{13}}{6}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết $A = \alpha$, $0 < \alpha < 90^0$, độ dài đường cao đỉnh $CD = h$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng R. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Giải

Trong ΔABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow BC = 2R.\sin\alpha.$$

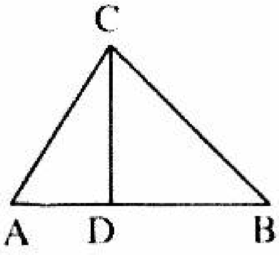
Trong ΔACD, ta có:

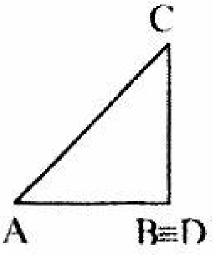
$$AC = \frac{CD}{\sin A} = \frac{h}{\sin\alpha},$$

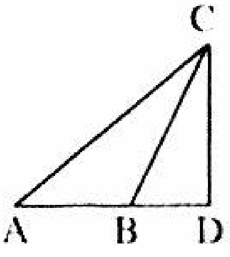
$$AD = CD.\text{cotg}\alpha = h.\text{cotg}\alpha$$

Trong ΔBCD, ta có:

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 = 4R^2.\sin^2\alpha - h^2 \Leftrightarrow BD = \sqrt{4R^2.\sin^2\alpha - h^2}.$$







Để tính AB, ta cần phân biệt ba trường hợp:

- Nếu D ở trong đoạn AB, thì

$$AB = AD + DB = h.\text{cotg}\alpha + \sqrt{4R^2.\sin^2\alpha - h^2}.$$

- Nếu D≡B, thì

$$AB = AD = h.\text{cotg}\alpha.$$

- Nếu D ở trong đoạn AB, thì

$$AB = AD - DB = h.\text{cotg}\alpha - \sqrt{4R^2.\sin^2\alpha - h^2}.$$

Chú ý: Sai lầm mà các em học sinh thường gặp phải là khi tính độ dài đoạn AB, như vậy trong trường hợp tường minh ta cần lựa chọn được một trong các dạng trên.

Ví dụ 4: Cho ΔABC cân tại A, biết $B = C = \alpha$, $AI = m$ với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

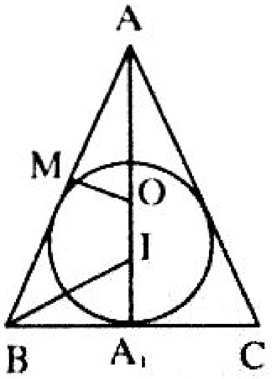
a. Tính độ dài cạnh BC.

b. Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, CMR

$$2R\sin\alpha = m.\cot g\frac{\alpha}{2}.$$

Giải

a. Trong ΔIAB, ta có:



$$\frac{AB}{\sin\widehat{AIB}} = \frac{AI}{\sin\widehat{ABI}}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{m.\sin(90^0 + \frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{m.\sin[180^0 - (90^0 - \frac{\alpha}{2})]}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{m.\sin(90^0 - \frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} = m.\cot g\frac{\alpha}{2}.$$

Trong ΔA_1AB, ta có:

$$BC = 2BA_1 = 2AB.\cos\alpha = 2m.\cot g\frac{\alpha}{2}.\cos\alpha.$$

b. Gọi M là trung điểm AB, trong ΔMAO, ta có:

$$R = OA = \frac{AM}{\sin\widehat{AOM}} = \frac{\frac{AB}{2}}{\sin\alpha} = \frac{m.\cot g\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2R\sin\alpha = m.\cot g\frac{\alpha}{2}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: Cho ΔABC, biết:

$$\frac{A.\sin A + B.\sin B}{A+B} + \frac{B.\sin B + C.\sin C}{B+C} + \frac{C.\sin C + A.\sin A}{C+A} = \sin A + \sin B + \sin C.$$

CMR ΔABC đều.

Giải

Sử dụng định lý hàm số sin trong ΔABC, ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$\frac{A.\frac{a}{2R} + B.\frac{b}{2R}}{A+B} + \frac{B.\frac{b}{2R} + C.\frac{c}{2R}}{B+C} + \frac{C.\frac{c}{2R} + A.\frac{a}{2R}}{C+A} = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A.a + B.b}{A+B} + \frac{B.b + C.c}{B+C} + \frac{C.c + A.a}{C+A} = a + b + c. \quad (1)$$

Trong ΔABC đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn, do đó:

$$(A - B)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow A.a + B.b \geq A.b + B.a$$

$$\Leftrightarrow 2(A.a + B.b) \geq A.b + B.a + A.a + B.b = (A + B)(a + b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A.a + B.b}{A + B} \geq \frac{1}{2}(a + b). \qquad (2)$$

tương tự ta cũng có:

$$\frac{B.b + C.c}{B + C} \geq \frac{1}{2}(b + c). \qquad (3)$$

$$\frac{C.c + A.a}{C + A} \geq \frac{1}{2}(c + a). \qquad (4)$$

Cộng theo vế (2), (3), (4), ta được:

$$\frac{A.a + B.b}{A + B} + \frac{B.b + C.c}{B + C} + \frac{C.c + A.a}{C + A} \geq a + b + c. \qquad (5)$$

Vậy (1) có được khi dấu "=" xảy ra tại (5)

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết $b = 3$, $c = 5$, $\cos A = \frac{4}{5}$.

a. Tính đường cao h_a.

☐ $h_a = \frac{9}{\sqrt{10}}$. ☐ $h_a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. ☐ Khác.

b. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

☐ $R = \frac{5\sqrt{10}}{6}$. ☐ $R = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, AB = 1, AC = 4. Gọi M là trung điểm AC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMBC.

☐ $R = \frac{\sqrt{75}}{2}$. ☐ $R = \frac{\sqrt{85}}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, biết $A = 60^0$, độ dài đường cao đỉnh $CD = \sqrt{3}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng 5. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

☐ $a = 5\sqrt{3}$, $b = 2$, $c = 6\sqrt{2} + 1$. ☐ $A = 5\sqrt{3}$, $b = 2$, $c = 6\sqrt{2} - 1$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết $BC = 2$. Phân giác BB_1 thoả mãn $BB_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $B_1C = 1$. Tính diện tích ΔABC.

☐ $S = \frac{5\sqrt{7}}{8}$. ☐ $S = \frac{15\sqrt{7}}{16}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC có $a : b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

a. Tính các góc của ΔABC

☐ $A = 120^0$, $B = 45^0$, $C = 15^0$. ☐ $A = 60^0$, $B = 45^0$, $C = 75^0$.

b. Cho $a=2\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ R=3. ☐ R=2. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho ΔABC, có độ dài ba cạnh bằng a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1. CMR ΔABC nhọn khi và chỉ khi:

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8.$$

Bài tập 7: Cho ΔABC. Lấy điểm D trên BC sao cho BD = 3CD. Đường tròn qua B, D và tiếp xúc với đường thẳng AC có bán kính R. CMR:

$$R = \frac{b(5 - 4\cos C).\sin A}{8\sin(A + C).\sin C}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $h_a = \frac{9}{\sqrt{10}}$, $R = \frac{5\sqrt{10}}{6}$.

Bài tập 2: $R = \frac{\sqrt{85}}{2}$.

Bài tập 3: $BC = 5\sqrt{3}$, $CA = 2$, $AB = 6\sqrt{2} + 1$.

Bài tập 4: $S = \frac{15\sqrt{7}}{16}$.

Bài tập 5: $A = 120^0$, $B = 45^0$, $C = 15^0$ và $R = 2$.

BÀI TOÁN 3

ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Định lý đường trung tuyến và ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và m_a, m_b, m_c theo thứ tự là các trung tuyến xuất phát từ đỉnh A, B, C. Theo định lý đường trung tuyến ta có:

- $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$.
- $c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$.
- $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$.

Ngoài ra các em học sinh cũng cần nhớ thêm hệ thức:

$$AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC}.\overline{IH},$$

với I là trung điểm BC và H là hình chiếu của A lên BC.

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Dạng 3: Nhận dạng tam giác.

Dạng 4: Quĩ tích.

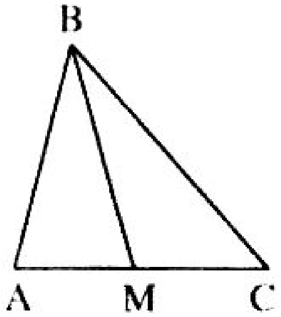
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC có AB = 5, AC = 6, BC = 7. Gọi trung điểm của AC là M. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔABM, ta có:

$$R_{ABM} = \frac{BM}{2\sin A}. \quad (1)$$



Trong ΔABC, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}) = \frac{1}{2}(25 + 49 - 18) = 28.$$

$$\Leftrightarrow BM = 2\sqrt{7}. \quad (2)$$

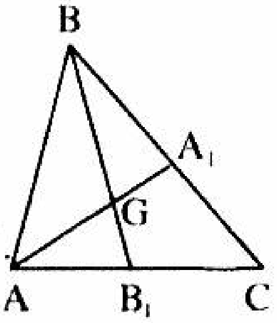
$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$R_{ABM} = \frac{5\sqrt{42}}{12}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, các trung tuyến $AA_1 = 3$, $BB_1 = 6$ và hợp với nhau một góc 60^0. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

Giải



Vì AA_1, BB_1 hợp với nhau một góc 60^0, do đó ta cần xét hai trường hợp là $\widehat{AGB} = 60^0$ và $\widehat{AGB} = 120^0$.

Trường hợp 1: Nếu $\widehat{AGB} = 60^0$.

Trong ΔGAB, ta có:

$$AB^2 = GA^2 + GB^2 - 2GA.GB.\cos\widehat{AGB} = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}.$$

Trong ΔGA_1B, ta có:

$$\frac{1}{4}BC^2 = A_1B^2 = GA_1^2 + GB^2 - 2GA_1.GB.\cos\widehat{A_1GB} = 21 \Rightarrow BC = 2\sqrt{21}.$$

Trong ΔGAB_1, ta có:

$$\frac{1}{4}AC^2 = AB_1^2 = GA^2 + GB_1^2 - 2GA.GB_1.\cos\widehat{AGB_1} = 12 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}.$$

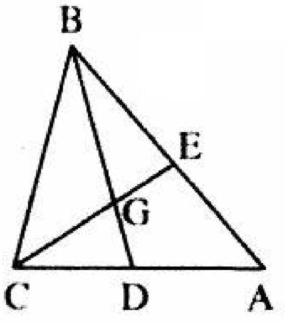
Trường hợp 2: Nếu $\widehat{AGB} = 120^0$ - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 3: Cho ΔABC không cân tại đỉnh A, trung tuyến BD và CE, có các cạnh a, b, c. CMR:

a. $AB^2.CE^2 - AC^2.BD^2 = \dfrac{(b^2 - c^2)(c^2 + b^2 - 2a^2)}{4}$

b. $AB.CE = AC.BD \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$.

Giải



a. Áp dụng định lý đường trung tuyến, ta có:

$$CE^2 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}) = \frac{1}{2}(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2})$$

$$BD^2 = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}) = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2})$$

suy ra:

$$AB^2.CE^2 - AC^2.BD^2 = \frac{1}{4}c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2) - \frac{1}{4}b^2(2a^2 + 2c^2 - b^2).$$

$$= \frac{1}{4}[2(c^2 - b^2)a^2 + b^4 - c^4]$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)$$

b. Ta có:

$$AB.CE = AC.BD \Leftrightarrow AB^2.CE^2 - AC^2.BD^2 = 0$$

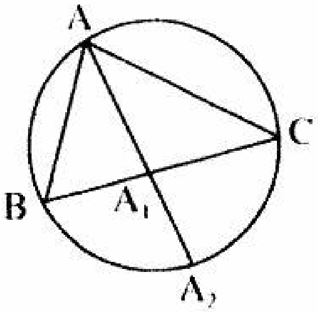
$$\Leftrightarrow (b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, các trung tuyến AA_1, BB_1 và CC_1 theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. CMR

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \le \frac{9}{4}.$$

Giải

Tứ giác ABA_2C nội tiếp đường tròn, do đó:



$$AA_1.A_1A_2 = BA_1.A_1C = \frac{a^2}{4}.$$

Ta có:

$$AA_1.AA_2 = AA_1.(AA_1 + A_1A_2) = AA_1^2 + AA_1.A_1A_2$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}) + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2}.$$

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_1^2}{AA_1.AA_2} = \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2})}{\frac{b^2 + c^2}{2}} = 1 - \frac{a^2}{2(b^2 + c^2)}. \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{BB_1}{BB_2} = 1 - \frac{b^2}{2(a^2 + c^2)}. \qquad (2)$$

$$\frac{CC_1}{CC_2} = 1 - \frac{c^2}{2(a^2 + b^2)}. \qquad (3)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} = 3 - \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}\right]. \qquad (4)$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \ge \frac{3}{2}.$$

Thật vậy:

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} = 1 + \frac{a^2}{b^2 + c^2} + 1 + \frac{b^2}{a^2 + c^2} + 1 + \frac{c^2}{a^2 + b^2} - 3$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) + (a^2 + b^2)](\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2}) - 3$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\ge} \frac{1}{2}.3.\sqrt{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)}.3.\frac{1}{\sqrt{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)}} - 3$$

$$= \frac{3}{2}. \qquad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta được:

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \le 3 - \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{9}{4}, \text{đpcm.}$$

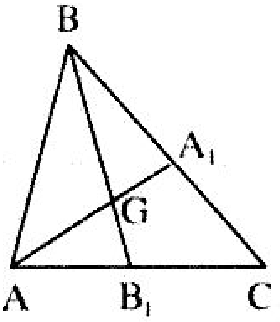
Ví dụ 5: Cho ΔABC có các cạnh a, b, c thoả mãn:

$$5c^2 = a^2 + b^2.$$

CMR ΔABC có hai trung tuyến AA_1 và BB_1 vuông góc với nhau.

Giải

Ta chứng minh ΔGAB vuông tại G, ta có:



$$GA^2 = \left(\frac{2}{3}AA_1\right)^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

$$GB^2 = \left(\frac{2}{3}BB_1\right)^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2).$$

Suy ra:

$$GA^2 + GB^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + 4c^2) = \frac{1}{9}(5c^2 + 4c^2) = c^2 = AB^2$$

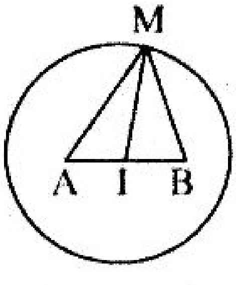
$\Leftrightarrow \Delta GAB$ vuông tại G $\Leftrightarrow AA_1 \perp BB_1$, đpcm.

Ví dụ 6: Cho đoạn AB = a cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$MA^2 + MB^2 = \frac{5a^2}{2}. \quad (1)$$

Giải

Gọi I là trung điểm AB, ta có:



$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{a^2}{2}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$2MI^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI^2 = a^2 \Leftrightarrow MI = a.$$

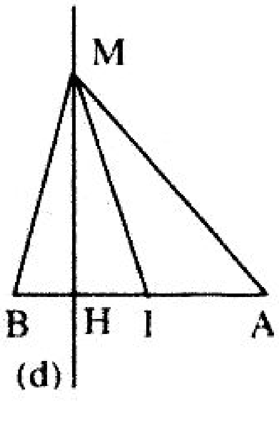
Vậy tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm I, bán kính R = a.

Ví dụ 7: Cho đoạn AB = a cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$MA^2 - MB^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Giải

Gọi I là trung điểm AB và H là hình chiếu vuông góc của M lên AB, ta có:



$$\frac{a^2}{2} = MA^2 - MB^2 = 2\,\overline{AB}.\overline{IH}$$

$$\Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{a}{4} \Leftrightarrow \text{H là trung điểm BI - cố định.}$$

Vậy tập hợp điểm M thuộc đường thẳng (d) qua H và vuông góc với AB.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$. Gọi trung điểm của AC là M. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

☐ $R_{ABM} = \frac{9\sqrt{7}}{14}$. ☐ $R_{ABM} = \frac{\sqrt{7}}{12}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, các trung tuyến $BB_1 = 6$, $CC_1 = 9$ và hợp với nhau một góc $120°$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

☐ $a = 2\sqrt{19}$, $b = 4\sqrt{7}$, $c = 2\sqrt{13}$. ☐ $a = 2\sqrt{7}$, $b = 2\sqrt{34}$, $c = 2\sqrt{19}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC có $BC = 3$, $AC = 4$, hai trung tuyến AA_1 và BB_1 vuông góc với nhau. Tính độ dài cạnh AB.

☐ $AB = \sqrt{5}$. ☐ $AB = \sqrt{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có G là trọng tâm. CMR:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Bài tập 5: Cho ΔABC có các cạnh a, b, c và các đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh B, C là m_b, m_c thoả mãn:

$$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$$

Chứng minh rằng:

$$b^2 - c^2 = 2a^2$$

từ đó suy ra

$$2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C$$

Bài tập 6: Cho ΔABC có ba trung tuyến m_a, m_b, m_c thoả mãn:

$$m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2.$$

CMR ΔABC có hai trung tuyến vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho đoạn $AB = 4$ cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

a. $MA^2 + MB^2 = 40$.

b. $MA^2 - MB^2 = 8$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $R_{ABM} = \frac{9\sqrt{7}}{14}$.

Bài tập 2: Ta có hai đáp số:

$a = 2\sqrt{19}$, $b = 4\sqrt{7}$, $c = 2\sqrt{13}$

hoặc $a = 2\sqrt{7}$, $b = 2\sqrt{34}$, $c = 2\sqrt{19}$.

Bài tập 3: $AB = \sqrt{5}$.

BÀI TOÁN 4

ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường cao trong tam giác và ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và h_a, h_b, h_c theo thứ tự là các đường cao xuất phát từ đỉnh A, B, C. Dựa trên các công thức tính diện tích:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

ta có thể xác định được độ dài của đường cao hoặc ngược lại.

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết AB = 2, BC = 3, CA = 4, đường cao AD. Tính độ dài đoạn CD.

Giải

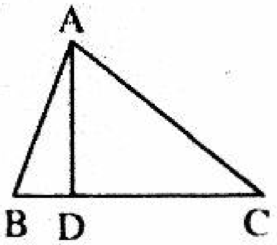
Ta có:

$$S = \frac{1}{2}BC.AD = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Trong ΔACD, ta có:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \frac{7}{2}.$$



Ví dụ 2: Cho ΔABC nhọn, đường cao AH và trung tuyến BE thoả mãn AH = BE.

a. Tính số đo góc $\widehat{CBE}$.

b. Giả sử AH là đường cao lớn nhất của ΔABC. Xác định dạng của ΔABC để B = 60^0.

Giải

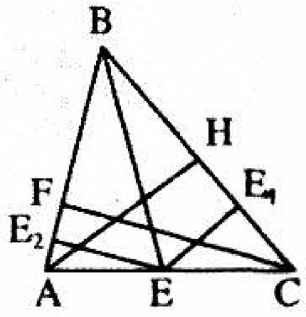
a. Dựng EE_1//AH, trong ΔE_1BE, ta có:

$$\sin\widehat{CBE} = \sin\widehat{E_1BE} = \frac{EE_1}{EB} = \frac{\frac{AH}{2}}{EB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{CBE} = 30^0.$$

b. Dựng đường cao CF và EE_2//CF, trong ΔE_2BE, ta có:

$$\sin\widehat{ABE} = \sin\widehat{E_2BE} = \frac{EE_2}{EB}$$

$$= \frac{\frac{CF}{2}}{EB} \le \frac{\frac{AH}{2}}{EB} = \frac{1}{2}$$



$\Leftrightarrow \widehat{ABE} \le 30^0$.

Suy ra

$$B = \widehat{CBE} + \widehat{ABE} = 30^0 + \widehat{ABE} \le 30^0 + 30^0 = 60^0. \qquad (1)$$

Vậy để $\hat{B} = 60^0$ điều kiện là dấu "=" xảy ra tại (1)

$\Leftrightarrow AH = CF \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân.

Ngoài ra ta có $B = 60^0$ do đó ΔABC đều.

Ví dụ 3: Cho ΔABC nhọn, trực tâm H, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. CMR:

$$\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \ge 6,$$

khi nào dấu "=" xảy ra.

Giải

Biến đổi VT của bất đẳng thức về dạng:

$$VT = \frac{AA_1 - A_1H}{A_1H} + \frac{BB_1 - B_1H}{B_1H} + \frac{CC_1 - C_1H}{C_1H}$$

$$= \frac{AA_1}{A_1H} + \frac{BB_1}{B_1H} + \frac{CC_1}{C_1H} - 3 = \frac{\frac{1}{2}a.AA_1}{\frac{1}{2}a.A_1H} + \frac{\frac{1}{2}b.BB_1}{\frac{1}{2}b.B_1H} + \frac{\frac{1}{2}c.CC_1}{\frac{1}{2}c.C_1H} - 3$$

$$= \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HAB}} - 3$$

$$= \frac{S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HCA}} +$$

$$+ \frac{S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}} - 3$$

$$= \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HBC}} + 1 + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HCA}} + 1\right) +$$

$$+ \left(1 + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HAB}} + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}}\right) - 3$$

$$= \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HAB}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta HCA}} + \frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HAB}}\right) + \left(\frac{S_{\Delta HCA}}{S_{\Delta HBC}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta HCA}}\right)$$

$$\overset{Côsi}{\ge} 2 + 2 + 2 = 6, \text{ đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết AB = 3, BC = 4, CA = 2, đường cao BD. Tính độ dài đoạn CD.

☐ $CD = \frac{11}{4}$. ☐ $CD = \frac{9}{4}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2 và B_2 sao cho $A_1A_2 = B_1B_2$. CMR ΔABC cân.

Bài tập 3: Cho ΔABC, diện tích bằng S, các đường cao h_a, h_b, h_c. CMR ΔABC đều khi và chỉ khi:

$$S = \frac{1}{6}(a.h_b + b.h_c + c.h_a).$$

Bài tập 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC có $b + c = 2a$. Chứng minh rằng:

a. $\sin B + \sin C = 2\sin A$

b. $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. CMR AA_1, BB_1, CC_1 là phân giác của $\Delta A_1B_1C_1$.

Lưu ý: Bài toán này rất cơ bản, ta còn gặp lại trong phần chu vi của tam giác.

Bài tập 7: Cho hai điểm A, B cố định. Tìm quĩ tích các điểm M sao cho BH=MC, với H là hình chiếu vuông góc của B lên AM.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $CD = \dfrac{11}{4}$.

Bài tập 2: Gọi H là trực tâm ΔABC, ta có:

$A_1A_2 = A_1H$,

$B_1B_2 = B_1H$,

$\Rightarrow HA_1 = HB_1 \Rightarrow \Delta HA_1C = \Delta HB_1C \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{BCH}$.

Vậy CH vừa là đường cao, vừa là đường phân giác $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Bài tập 3: Ta biến đổi hệ thức giả thiết về dạng:

$$S = \frac{1}{6}(a.h_b + b.h_c + c.h_a)$$

$$= \frac{1}{6}\left(b.h_b.\frac{a}{b} + c.h_c.\frac{b}{c} + a.h_a.\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{S}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3. \qquad (1)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Do đó (1) xảy ra khi:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI TOÁN 5

ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

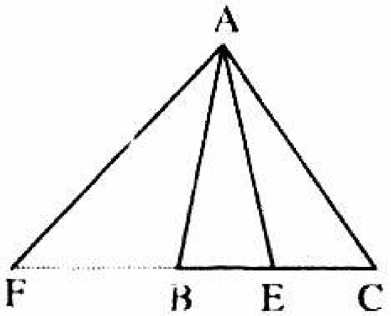
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường phân giác của tam giác và ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và l_A, l_B, l_C theo thứ tự là độ dài các phân giác xuất phát từ đỉnh A, B, C. Theo định lý đường phân giác ta có:

Phân giác trong	*Phân giác ngoài*
$l_A = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$,	$l'_A = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{\lvert b-c\rvert}$,
$l_B = \dfrac{2ac.\cos\dfrac{B}{2}}{a+c}$,	$l'_B = \dfrac{2ac.\cos\dfrac{B}{2}}{\lvert a-c\rvert}$,
$l_C = \dfrac{2ab.\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}$.	$l'_C = \dfrac{2ab.\cos\dfrac{C}{2}}{\lvert a-b\rvert}$.



Ngoài ra các em học sinh cũng cần nhớ thêm hệ thức:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC},$$

với E, F theo thứ tự là chân đường phân giác trong và ngoài kẻ từ đỉnh A.

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.
Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.
Dạng 3: Nhận dạng tam giác.
Dạng 4: Giải bài toán quỹ tích.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Tính độ dài đường phân giác trong, ngoài của góc A.

Giải

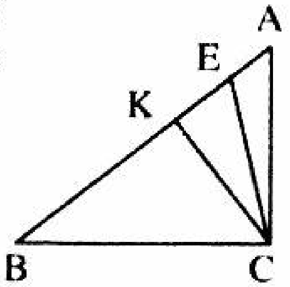
Trong ΔABC, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0.$$

Khi đó:

$$l_A = \frac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} = 2\sqrt{2}.$$

$$l'_A = \frac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{\lvert b-c\rvert} = 2\sqrt{6}\,(\sqrt{3}+2).$$



Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại C, biết $BC = 8$. Gọi CK là đường cao và CE là phân giác trong của ΔACK. Tính độ dài đoạn BE.

Giải

Ta có nhận xét:

$$\widehat{BEC} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} = \widehat{KCB} + \widehat{ECK} = \widehat{BCE}$$

$$\Leftrightarrow \Delta BCE \text{ cân tại } B \Leftrightarrow BE = BC = 8.$$

Ví dụ 3: Xác định số đo của góc A của ΔABC, biết:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_A}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có:

$$l_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_A} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)\dfrac{1}{2\cos\frac{A}{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 60^0 \Leftrightarrow A = 120^0.$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC không cân tại đỉnh A, trung tuyến BD và CE, có các cạnh a, b, c. Gọi AF ($F \in BC$) là đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng:

$$AF = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Giải

Theo tính chất của đường phân giác trong, ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{FC} = \frac{c}{b}$$

suy ra:

$$\frac{FB}{FB + FC} = \frac{c}{b+c},$$

$$FB = \frac{ac}{b+c}.$$

Áp dụng công thức hàm số cosin đối với ΔABF, ta có:

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB.BF.\cos B$$

$$= c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - 2c.\frac{ac}{b+c}.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - \frac{c(a^2 + c^2 - b^2)}{b+c}$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(b + c - a)(b + c + a) = \frac{bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

$\Rightarrow AF = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, đpcm.

Ví dụ 5: Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c và l_A, l_B, l_C theo thứ tự là độ dài các phân giác xuất phát từ đỉnh A, B, C. CMR:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{l_A}+\frac{1}{l_B}+\frac{1}{l_C}.$$

Giải

Ta có nhận xét $0 < \dfrac{A}{2} < 90^0$ do đó $0 < \cos\dfrac{A}{2} < 1$, từ đó với:

$$l_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} < \frac{2bc}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_A} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{1}{l_B} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right). \qquad (2)$$

$$\frac{1}{l_C} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 6: Cho hai điểm cố định A, B trên đường tròn (C), điểm C di động trên đường tròn này. Tìm tập hợp tâm I đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải

Ta có:

$$\widehat{AIB} = 180^0 - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^0 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 180^0 - \left(90^0 - \frac{C}{2}\right) = 90^0 + \frac{C}{2}.$$

Vì C di động trên đường tròn (C) chắn cung AB cố định nên góc C không đổi. Vậy tập hợp điểm I thuộc đường tròn nhìn AB dưới một góc bằng $90^0 + \dfrac{C}{2}$, ngoại trừ hai điểm A, B (do đó nó thuộc hai cung tròn trên đường tròn này).

Chú ý: Trong hầu hết những ví dụ của mục này chúng ta đã sử dụng công thức tính độ dài đường phân giác, tuy nhiên các em học sinh cần nhớ rằng công thức đó không phải bao giờ cũng được thừa nhận.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3}+1$. Tính độ dài:

a. Đường phân giác trong của góc A.

☐ $l_A = 3$. ☐ $l_A = 2$. ☐ Khác.

b. Đường phân giác ngoài của góc A.

☐ $l'_A = 6 + 4\sqrt{3}$. ☐ $l'_A = 4\sqrt{3} - 6$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại C, AD là đường phân giác trong của góc A, BD = a, CD = b, biết a > b.

a. Tính độ dài cạnh AB.

☐ $AB = a.\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$. ☐ $AB = a.\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$. ☐ Khác.

b. Tính độ dài cạnh AC.

☐ $AC = b.\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.   ☐ $AC = b.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.   ☐ Khác.

c. Tính độ dài cạnh BC.

☐ $BC = a - b$.   ☐ $BC = a + b$.   ☐ Khác.

Bài tập 3: Xác định số đo của góc A của ΔABC, biết:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{l_A.\sqrt{3}}.$$

Bài tập 4: Cho ΔABC, biết $B = 12^0$, $C = 132^0$. So sánh độ dài phân giác ngoài của góc B và C.

Bài tập 5: Cho ΔABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. Gọi CL và CM theo thứ tự là phân giác trong và ngoài của góc C thoả mãn CL = CM. Chứng minh rằng:

$$AC^2 + BC^2 = 4R^2.$$

Bài tập 6: Cho ΔABC, trọng tâm G và $b \ge c$. Phân giác góc A cắt trung tuyến xuất phát từ B và C theo thứ tự tại M, N. CMR:

a. $MN \ge \frac{4}{9}\left(\frac{b-c}{b+c}\right).l_A$.   b. $\frac{GM.GN}{MN} = \frac{4}{9}.\frac{(b-c).m_b.m_c}{(b+c).l_A}$.

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A, với BC = a, AC = b, AB = c, l_B, l_C theo thứ tự là độ dài các phân giác xuất phát từ đỉnh B, C. CMR:

a. $4a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = l_B.l_C$.

b. $2IB.IC = l_B.l_C$, với I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

IV. HƯỚNG DẪN

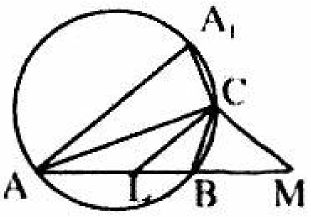
Bài tập 1: $l_A = 2$, $l'_A = 6 + 4\sqrt{3}$.

Bài tập 2: $AB = a.\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $AC = b.\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $BC = a + b$.

Bài tập 3: $A = 60^0$.

Bài tập 4: $l'_B = l'_C$.

Bài tập 5: Xét các trường hợp:



Trường hợp 1: Nếu B tù.

Nhận xét rằng:

$$\widehat{LCM} = 90^0 \text{ và từ giả thiết ta có } \widehat{CLM} = 45^0.$$

Từ đó suy ra trong ΔABC, ta có $A = B - 90^0$.

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp, ta có:

$$\widehat{A_1AC} = (180^0 - \widehat{AA_1C}) - \widehat{ACA_1} = B - 90^0 = A \Rightarrow CA_1 = BC.$$

Từ đó:

$$4R^2 = A_1A^2 = AC^2 + A_1C^2 = AC^2 + BC^2, \text{dpcm}.$$

Trường hợp 2: Nếu B vuông hoặc nhọn - *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

BÀI TOÁN 6

ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Đường tròn tròn ngoại tiếp tam giác - Bán kính.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C và bán kính đường tròn ngoại tiếp R, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

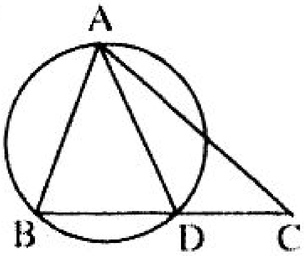
Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới đường tròn ngoại tiếp.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, có $AC = 6$, $AB = 3$. Đường tròn (C) bán kính bằng 5 đi qua hai điểm A, B và cắt BC tại D. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

Giải

Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACD, ta có:

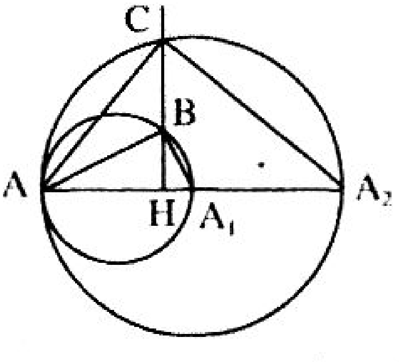


$$R_1 = \frac{AC}{2\sin ADC} = \frac{AC}{2\sin(180^0\quad ADB)}$$

$$= \frac{AC}{2\sin ADB} = \frac{AC}{2.\dfrac{AB}{2R_{\Delta ABD}}} = \frac{6}{2.\dfrac{3}{2.5}} = 10.$$

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (I_1), (I_2) có bán kính bằng 2, 8 tiếp xúc trong với nhau tại A. Nửa đường thẳng vuông góc với I_1I_2 cắt (I_1), (I_2) theo thứ tự tại B, C. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải



Trong ΔABC, ta có:

$$R = \frac{AB}{2\sin ACB}. \qquad (1)$$

Trong đường tròn (I_1), ta có:

$$AB^2 = AA_1.AH = 4AH. \qquad (2)$$

Trong đường tròn (I_2), ta có:

$$AC^2 = AA_2.AH = 16AH. \qquad (3)$$

Trong ΔHAC, ta có:

$$\sin\widehat{ACB} = \sin\widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{4\sqrt{AH}} = \frac{\sqrt{AH}}{4}. \qquad (4)$$

Thay (2), (4) vào (1), ta được:

$$R = \frac{2\sqrt{AH}}{2.\frac{\sqrt{AH}}{4}} = 4.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, AB = 4, AC = 5. Gọi M là trung điểm AB. Tính bán kính R_1 của đường tròn ngoại tiếp ΔMBC.

☐ $R_1 = \frac{\sqrt{1189}}{10}$. ☐ $R_1 = \frac{7}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC có $\hat{B} = 60^0$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 2. Tính bán kính R_1 của đường tròn qua A, C và tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC.

☐ $R_1 = 3$. ☐ $R_1 = 2$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC, có AC = b, AB = c. Đường tròn (C) bán kính bằng R đi qua hai điểm A, B và cắt BC tại D. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

☐ $R_1 = \frac{R.b}{c}$. ☐ $R_1 = \frac{2R.b}{c}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho hai đường tròn (I_1), (I_2) có bán kính bằng R_1, R_2 tiếp xúc trong với nhau tại A. Nửa đường thẳng vuông góc với I_1I_2 cắt (I_1), (I_2) theo thứ tự tại B, C. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $R = 2\sqrt{R_1.R_2}$. ☐ $R = \sqrt{R_1.R_2}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại C và đường cao CD = h. Gọi K, L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D lên AC, BC.

a. CMR tứ giác AKLB nội tiếp được.

b. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tứ giác AKLB cắt CD tại P, Q.

- Tính độ dài DP.

☐ $DP = \frac{(\sqrt{5}-1)h}{2}$. ☐ $DP = \frac{(\sqrt{5}+1)h}{2}$. ☐ $DP = \frac{3}{4}$.

- Tính độ dài DQ.

☐ $DQ = \frac{(\sqrt{5}-1)h}{2}$. ☐ $DQ = \frac{(\sqrt{5}+1)h}{2}$. ☐ $DQ = \frac{3}{4}$.

Bài tập 6: Tìm bộ ba số a, b, c$\in$N là độ dài ba cạnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 3, 125.

☐ (5, 5, 7). ☐ (5, 5, 6). ☐ Khác.

Bài tập 7: Cho ΔABC, có các cạnh a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R. Xác định dạng của ΔABC (nhọn, vuông, tù) tuỳ thuộc vào dấu của biểu thức:

$$T = a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2.$$

Bài tập 8: Cho đường tròn (C) cố định. Tìm tam giác nội tiếp trong (C) có tổng bình phương các cạnh lớn nhất.

Bài tập 9: Cho ΔABC, điểm M bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, chứng minh rằng tổng:

$$T = MA^4 + MB^4 + MC^4$$

là đại lượng không đổi.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $R_1 = 2$.

Bài tập 2: $R_1 = \frac{R.b}{c}$.

Bài tập 3: $R = \sqrt{R_1.R_2}$.

Bài tập 4: $DP = \frac{(\sqrt{5}-1)h}{2}$, $DQ = \frac{(\sqrt{5}+1)h}{2}$.

Bài tập 5: (5, 5, 6).

Bài tập 6: Ta có:

- Nếu T > 0 thì ΔABC nhọn.
- Nếu T = 0 thì ΔABC vuông.
- Nếu T < 0 thì ΔABC tù.

Bài tập 7: Tam giác đều.

BÀI TOÁN 7

ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Đường tròn nội tiếp tam giác và ứng dụng

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C và bán kính đường tròn nội tiếp r, ta có:

$$r = \frac{S}{p},$$

$$r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$= \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{c.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới đường tròn nội tiếp.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, có AB = 3, AC = 6, $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính bán kính đường tròn cắt cả 3 cạnh của ΔABC và chắn trên mỗi cạnh 1 dây có độ dài bằng 2.

Giải

Gọi O là tâm đường thẳng cần xác định, và I, J, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O lên BC, CA, AB.

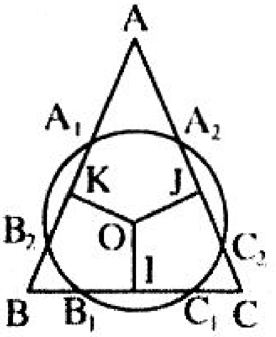
Từ giả thiết:

$B_1C_1 = C_2A_2 = A_1B_2 \Leftrightarrow OI = OJ = OK$

⇔ O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

Khi đó bán kính R của đường tròn cần xác định được cho bởi:

$$R^2 = OB_1^2 = IB_1^2 + OI^2. \quad (1)$$



Ta có:

$$IB_1 = \frac{B_1C_1}{2} = 1. \quad (2)$$

$$a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 9 + 36 - 2.3.6.\cos 60^0 = 27$$

$$OI = r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(b+c-a)\text{tg}\frac{A}{2}$$

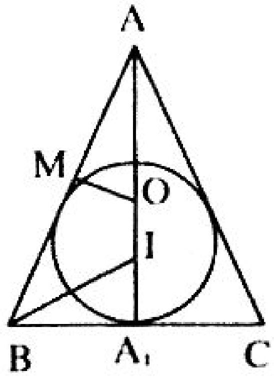
$$= \frac{1}{2}(6 + 3 - 3\sqrt{3})\text{tg}30^0 = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$R^2 = \frac{20 - 9\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{40 - 18\sqrt{3}}}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$



Giải

Trong ΔIBC, ta có:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{a}{\sin BIC} = \frac{a}{\sin\frac{B+C}{2}}$$

$$= \frac{a}{\sin(90^0 - \frac{A}{2})} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow IB = \frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}. \qquad (1)$$

Mặt khác ta lại có:

$$IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \Leftrightarrow r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \text{đpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC có độ dài các đường cao h_a, h_b, h_c, độ dài các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c. R và r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. CMR:

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le \frac{r+R}{r},$$

dấu "=" xảy ra khi nào ?

Giải

Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có:

$$m_a = AA_1 \le OA + OA_1 = R + OA_1 \Rightarrow \frac{m_a}{h_a} \le \frac{R}{h_a} + \frac{OA_1}{h_a}. \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{m_b}{h_b} \le \frac{R}{h_b} + \frac{OB_1}{h_b}. \qquad (2)$$

$$\frac{m_c}{h_c} \le \frac{R}{h_c} + \frac{OC_1}{h_c}. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le R\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}. \qquad (4)$$

Gọi S là diện tích ΔABC, ta lại có:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{a.h_a} + \frac{b}{b.h_b} + \frac{c}{c.h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}. \qquad (5)$$

$$\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = \frac{a.OA_1}{a.h_a} + \frac{b.OB_1}{b.h_b} + \frac{c.OC_1}{c.h_c}$$

$$= \frac{2S_{\Delta OBC} + 2S_{\Delta OCA} + 2S_{\Delta OAB}}{2S} = 1. \qquad (6)$$

Thay (5), (6) vào (4), ta được:

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le \frac{R}{r} + 1 = \frac{r+R}{r}, \text{ đpcm.}$$

- Dấu "=" xảy ra

⇔ dấu "=" xảy ra tại (4)

⇔ dấu "=" xảy ra tại (1), (2) và (3)

⇔ O thuộc AA_1, BB_1, CC_1

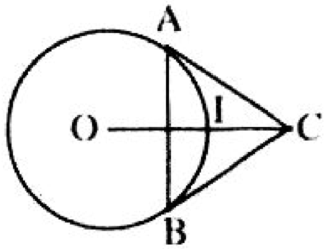
⇔ ΔABC đều.

Ví dụ 4: Cho đường tròn (O), A là điểm cố định trên (O), còn B là điểm di động trên (O). Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại C. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Giải

Gọi I là giao điểm của OC với (O), ta có ngay AI là phân giác góc A, từ đó suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Vậy tập hợp tâm I thuộc đường tròn (C), ngoại trừ các điểm A, A_1, A_2, trong đó A_1A_2 là đường kính vuông góc với OA.



III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, có AB = 2, AC = 3, BC = 4. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

☐ $r = \frac{\sqrt{13}}{5}$. ☐ $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, có BC=a, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$. Tính bán kính đường tròn cắt cả 3 cạnh của ΔABC và chắn trên mỗi cạnh một dây có độ dài bằng d.

☐ $R = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{a^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$. ☐ $R = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{a^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC vuông, biết $ABC = \alpha$.

a. Tính tỷ số bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác theo α.

☐ $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(45^0 + \frac{\alpha}{2})}$. ☐ $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(45^0 - \frac{\alpha}{2})}$.

b. Xác định α để tỷ số trên nhỏ nhất.

☐ $\alpha = 45^0$. ☐ $\alpha = 65^0$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC vuông tại C. CMR:

$$\frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} \le \frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}.$$

Bài tập 5: Cho ΔABC, biết $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ thoả mãn $a + c = 2b$. CMR:

a. $r = \frac{h_b}{3}$, với r là bán kính đường tròn nội tiếp, h_b là độ dài đường cao đỉnh B.

b. GI//AC, với G, I theo thứ tự là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

c. Phân giác trong của góc B vuông góc với OI, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

d. Tổng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên l_B đến các cạnh của tam giác bằng một hằng số.

e. Tứ giác AMIN nội tiếp, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC.

Bài tập 6: (***Công thức Euler***): Cho ΔABC, O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác, theo thứ tự có bán kính bằng R, r. CMR:

$$OI^2 = R^2 - 2R.r.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Bài tập 2: $R = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{a^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$.

Bài tập 3: $\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(45^0 - \frac{\alpha}{2})}$, $\alpha = 45^0$.

BÀI TOÁN 8

CHU VI TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường cao trong tam giác và ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C, ta có:

$$p = \frac{S}{r},$$

$$p = a + r.\text{cotg}\frac{A}{2} = b + r.\text{cotg}\frac{B}{2} = c + r.\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

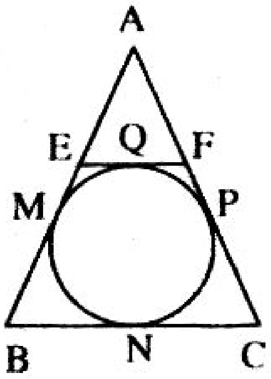
Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới chu vi.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC, biết $BC = 6$. Lấy E, F theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EF song song với BC và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính chu vi ΔABC, biết $EF = 2$.

Giải



Ta có hai ΔAEF và ΔABC đồng dạng, do đó:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}. \quad (1)$$

Ta có:

$$\begin{cases} c = AB = AM + MB = AM + NB \\ b = AC = AP + PC = AM + NC \end{cases}$$

$$\Rightarrow b + c = 2AM + BC = 2AM + 6$$

$$\Leftrightarrow AM = AP = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a. \quad (2)$$

$$\begin{cases} AM = AE + EM = AE + EQ \\ AM = AP = AF + FP = AF + FQ \end{cases} \Rightarrow 2AM = AE + AF + EF$$

$$\Leftrightarrow AM = AP = p_{\Delta AEF}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{2}{6} = \frac{p-6}{p} \Leftrightarrow p = 9.$$

Vậy chu vi của ΔABC bằng 18.

Chú ý: Kết quả của bài toán trên trong trường hợp tổng quát được ứng dụng khá nhiều, do đó các em học sinh cần thực hiện tường minh bài tập 1. Để thấy ứng dụng của nó chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Trong ΔABC kẻ ba đường thẳng song song với các cạnh và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác và tạo ra ba tam giác trong ΔABC. Ba tam giác đó lần lượt có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R_1, R_2, R_3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải

Ta có chu vi của ba tam giác được tạo ra theo thứ tự bằng:

$2(p - a), 2(p - b), 2(p - c)$,

suy ra nếu gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \left(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p}\right).R = R.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1.

a. CMR AA_1, BB_1, CC_1 là phân giác của $\Delta A_1B_1C_1$.

b. Gọi a_1, b_1, c_1 là các cạnh của $\Delta A_1B_1C_1$. Tính cosin các góc và chu vi ΔABC.

Giải

a. Chúng ta đã gặp trong bài toán về đường cao của tam giác - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

b. Xét hai trường hợp về dạng của ΔABC.

Trường hợp 1: Nếu ΔABC nhọn.

Ta có $A = 90^0 - \frac{A_1}{2}$ suy ra:

$$\cos A = \cos(90^0 - \frac{A_1}{2}) = \sin\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{a_1^2 - (b_1 - c_1)^2}{4b_1.c_1}},$$

tương tự ta có:

$$\cos B = \sqrt{\frac{b_1^2 - (a_1 - c_1)^2}{4a_1.c_1}},$$

$$\cos C = \sqrt{\frac{c_1^2 - (a_1 - b_1)^2}{4a_1.b_1}}.$$

Nhận xét rằng hai ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng, do đó:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC} = \cos A \Rightarrow a = BC = a_1.\sqrt{\frac{4b_1.c_1}{a_1^2 - (b_1 - c_1)^2}},$$

tương tự ta có:

$$b = b_1.\sqrt{\frac{4a_1.c_1}{b_1^2 - (a_1 - c_1)^2}},$$

$$c = c_1.\sqrt{\frac{4a_1.b_1}{c_1^2 - (a_1 - b_1)^2}}.$$

Từ đó suy ra chu vi P của ΔABC là:

$$P = a_1.\sqrt{\frac{4b_1.c_1}{a_1^2 - (b_1 - c_1)^2}} + b_1.\sqrt{\frac{4a_1.c_1}{b_1^2 - (a_1 - c_1)^2}} + c_1.\sqrt{\frac{4a_1.b_1}{c_1^2 - (a_1 - b_1)^2}}..$$

Trường hợp 2: Nếu ΔABC tù - *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Ví dụ 4: Cho hai ΔABC và ΔDEF cùng nội tiếp trong đường tròn (C) và có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F. \qquad (1)$$

CMR hai ΔABC và ΔDEF có cùng chu vi.

Giải

Gọi R là bán kính đường tròn (C).

Trong ΔABC, ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{p_{\Delta ABC}}{R}. \qquad (2)$$

Trong ΔDEF, ta có:

$$\sin D + \sin E + \sin F = \frac{d}{2R} + \frac{e}{2R} + \frac{f}{2R} = \frac{p_{\Delta DEF}}{R}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{p_{\Delta ABC}}{R} = \frac{p_{\Delta DEF}}{R} \Leftrightarrow p_{\Delta ABC} = p_{\Delta DEF}, \text{ dpcm.}$$

Ví dụ 5: Trong các tam giác có chu vi không đổi hãy tìm tam giác có chu vi đường tròn nội tiếp lớn nhất.

Giải

Ta có:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow (pr)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) \overset{\text{Côsi}}{\le} \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow r \le \frac{p}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy $r_{Max} = \frac{p}{3\sqrt{3}}$, đạt được khi:

$p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác là đều.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết BC = a. Lấy E, F theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EF song song với BC và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính nửa chu vi p của ΔABC, biết EF = d.

☐ $P = \frac{a^2}{a-d}$. ☐ $p = \frac{a^2}{a+d}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC, biết độ dài các cạnh là các số nguyên liên tiếp. Tính nửa chu vi p của ΔABC, biết trong ΔABC một trung tuyến vuông góc với một phân giác.

☐ $p = \frac{9}{2}$. ☐ $P = 6$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Trong ΔABC kẻ ba đường thẳng song song với các cạnh và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác và tạo ra ba tam giác trong ΔABC. Ba tam giác đó lần lượt có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2, 3, 5. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $R = 11$. ☐ $R = 10$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Đường thẳng (d) chia tam giác thành hai phần có diện tích và chu vi bằng nhau. CMR đường thẳng (d) đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài tập 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $p = \dfrac{a^2}{a-d}$.

Bài tập 2: $p = \dfrac{9}{2}$.

Bài tập 3: $R = 10$.

Bài tập 5: Trên trung tuyến BB_1 lấy điểm D đối xứng với B qua B_1, suy ra $B_1D = m_b$.

Trong ΔABD, ta có:

$$BD < AB + AD \Leftrightarrow 2m_b < a + c \Leftrightarrow m_b < \frac{a+c}{2}, \quad (1)$$

tương tự ta cũng có:

$$m_c < \frac{a+b}{2}, \quad (2)$$

$$m_a < \frac{b+c}{2}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$m_a + m_b + m_c < 2p. \quad (*)$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó trong ΔGAB, ta có:

$$GA + GB > AB \Leftrightarrow \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c \Leftrightarrow m_a + m_b > \frac{3c}{2}, \quad (4)$$

tương tự ta cũng có:

$$m_b + m_c > \frac{3a}{2}, \quad (5)$$

$$m_c + m_a > \frac{3b}{2}. \quad (6)$$

Cộng theo vế (4), (5), (6) ta được:

$$\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c. \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

BÀI TOÁN 9

DIỆN TÍCH TAM GIÁC - TỈ SỐ DIỆN TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Diện tích tam giác - Tỉ số diện tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC, với các cạnh là a, b, c, các góc A, B, C, bán kính đường tròn ngoại tiếp R, bán kính đường tròn nội tiếp r, ta có:

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$

  với p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Trong mục này chúng ta giải các dạng toán sau:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố của tam giác.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng của tam giác liên quan tới diện tích.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC có AB = 3, AC = 4 và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính BC.

Giải

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}.3.4.\sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 60^0 \\ A = 120^0 \end{array}\right.$$

- Với $A = 60^0$, ta được:

  $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 13 \Leftrightarrow BC = \sqrt{13}.$$
- Với $A = 120^0$, ta được:

  $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 37 \Leftrightarrow BC = \sqrt{37}.$$

Ví dụ 2: Qua một điểm O trong tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành 6 phần, trong đó có 3 tam giác lần lượt có diện tích là 4, 9, 16. Tính diện tích của tam giác ABC.

Giải

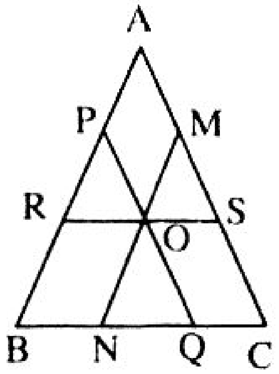
Giả sử qua O kẻ các đường thẳng RS//BC, MN//AB, PQ//AC.

Dễ dàng thấy rằng các tam giác ABC, OPR, OMS, OnQ đồng dạng với nhau, do đó nếu gọi S, S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là diện tích của các tam giác, ta có:

$$\frac{S_1}{S}=\left(\frac{PR}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{S}}=\frac{PR}{AB}. \qquad (1)$$

$$\frac{S_2}{S}=\left(\frac{OM}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{S}}=\frac{OM}{AB}=\frac{AP}{AB}. \qquad (2)$$

$$\frac{S_3}{S}=\left(\frac{ON}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{S}}=\frac{ON}{AB}=\frac{RB}{AB}. \qquad (3)$$



Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{2+3+4}{\sqrt{S}}=\frac{AP+PR+RB}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{S}=9 \Leftrightarrow S=81.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC có diện tích 12. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2},\ \frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$$

và BN cắt CM tại D.

a. Tính diện tích tam giác BMC, ABN và AMN.

b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ACD và BCD; ABD và BCD.

c. Suy ra diện tích của tam giác BCD.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BM.BC.\sin B}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin B}=\frac{BM}{BA}=\frac{BA-AM}{BA}=1-\frac{AM}{BA}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow S_{BMC}=6.$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{\Delta ABN}=4.$$

Mặt khác:

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AM.AN.\sin A}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A}=\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMN}=2$$

b. Vẽ hai đường cao AK và BL của hai tam giác ACD và BCD thì AK//BL.

Suy ra:

$$\frac{AK}{BL}=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AB-AM}=1$$

Do đó:

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\frac{1}{2}DC.AK}{\frac{1}{2}DC.BL}=\frac{AK}{BL}=1$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}=\frac{1}{2}.$$

c. Ta có:

$$S_{BCD}+S_{ABD}+S_{ACD}=12\Leftrightarrow S_{BCD}+\frac{1}{2}.S_{BCD}+S_{BCD}=12\Leftrightarrow S_{BCD}=\frac{24}{5}.$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $S=p^2.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}$.

b. $r=p.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}$.

Giải

a. Ta có:

$$S=p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}=p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}=p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2},$$

suy ra:

$$S^3=p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}.p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}.p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$=p^2.p(p-a)(p-b)(p-c).\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$=p^2.S^2.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow S=p^2.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có $S = pr$, do đó áp dụng kết quả trong a), ta được:

$$pr=p^2.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r=p.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: Từ điểm M tuỳ ý trong ΔABC, các đường thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. CMR:

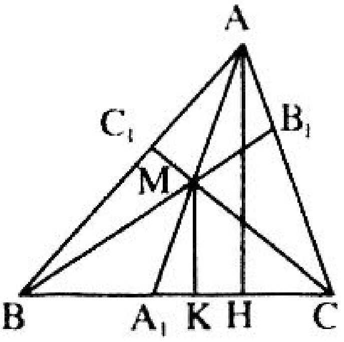
$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=1$$

Giải

Kẻ AH, MK vuông góc với BC.

Ta có:

$$\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{MK}{AH}=\frac{\frac{1}{2}MK.BC}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}, \qquad (1)$$



tương tự ta cũng có:

$$\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}, \qquad (2)$$

$$\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}}. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1, \text{dpcm.}$$

Ví dụ 6: Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=k, \text{ với } k>0, k \text{ cho trước.}$$

a. Biết $S_{\Delta ABC}=S_0$. Tính $S_{\Delta MNP}$ theo S_0 và k.

b. ΔABC cố định. Hãy chọn số k sao cho ΔMNP có diện tích nhỏ nhất.

Giải

a. Ta có:

$$\frac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BA.BN.\sin B}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin B}=\frac{BN}{BC}=\frac{BN}{BN+NC}=\frac{\frac{BN}{NC}}{\frac{BN}{NC}+1}=\frac{k}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_{ABN}=\frac{k}{k+1}.S_0$$

Ta có:

$$\frac{S_{\Delta BNM}}{S_{\Delta ABN}}=\frac{\frac{1}{2}BM.BN.\sin B}{\frac{1}{2}BA.BN.\sin B}=\frac{BM}{BA}=\frac{BM}{BM+MA}=\frac{\frac{BM}{MA}}{\frac{BM}{MA}+1}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1}=\frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BNM}=\frac{k}{(k+1)^2}.S_0$$

Tương tự, ta cũng có:

$$S_{\Delta CNP}=S_{\Delta AMP}=\frac{k}{(k+1)^2}.S_0$$

do đó:

$$S_{\Delta MNP}=S_0-\frac{3k}{(k+1)^2}S_0=S_0[1-\frac{3k}{(k+1)^2}]$$

b. $S_{\Delta MNP}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$(1-\frac{3k}{(k+1)^2}) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{3k}{(k+1)^2} \text{ lớn nhất.}$$

Ta có:

$$(k+1)^2 \geq 4k \Rightarrow \frac{k}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3k}{(k+1)^2} \geq \frac{1}{4}$$

Vậy $S_{\Delta MNP}$ min $= \frac{1}{4} S_0$ khi

$$(k+1)^2 = 4k \Leftrightarrow k = 1.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Qua một điểm O trong tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành 6 phần, trong đó có 3 tam giác lần lượt có diện tích là S_1, S_2, S_3. Tính diện tích của tam giác ABC theo S_1, S_2, S_3.

☐ $S = 4(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. ☐ $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Bài tập 2: Cho ΔABC có diện tích S_0. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho:

$$\frac{AM}{AB} = m,\ \frac{AN}{AC} = n, \text{ với } 0 < m, n < 1$$

và BN cắt CM tại D.

a. Tính diện tích ΔBMC.

☐ $S_{\Delta BMC} = (1-m)S_0$. ☐ $S_{\Delta BMC} = (1+m)S_0$. ☐ Khác.

b. Tính diện tích ΔABN.

☐ $S_{\Delta ABN} = nS_0$. ☐ $S_{\Delta ABN} = (1-n)S_0$. ☐ Khác.

c. Tính diện tích ΔAMN.

☐ $S_{\Delta AMN} = (1-m).(1-n)S_0$. ☐ $S_{\Delta AMN} = m.nS_0$. ☐ Khác.

d. Tính tỉ số diện tích của hai ΔACD và ΔBCD.

☐ $\frac{m}{1-m}$. ☐ $\frac{m}{1+m}$. ☐ Khác.

e. Tính tỉ số diện tích của hai ΔABD và ΔBCD.

☐ $\frac{n}{1+n}$. ☐ $\frac{n}{1-n}$. ☐ Khác.

f. Tính diện tích của ΔBCD.

☐ $S_{\Delta BCD} = \frac{(1-m)(1+n)S_0}{1+mn}$. ☐ $S_{\Delta BCD} = \frac{(1-m)(1-n)S_0}{1-mn}$.

Bài tập 3: Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lần lượt lấy các điểm E, F và D sao cho

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CD}{DA} = \frac{1}{3}.$$

Gọi S_0, S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, DEF và tam giác tạo thành bởi các đường thẳng AF, BD, CE.

a. Tính $\frac{S_2}{S_0}$.

☐ $\frac{S_2}{S_0}=\frac{4}{13}$. ☐ $\frac{S_2}{S_0}=\frac{5}{13}$. ☐ Khác.

b. Tính $\frac{S_2}{S_1}$.

☐ $\frac{S_2}{S_1}=\frac{65}{91}$. ☐ $\frac{S_2}{S_1}=\frac{64}{91}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC cân tại A, có $A=120^0$, độ dài trung tuyến kẻ từ B bằng $\sqrt{7}$. Đường tròn tâm A bán kính bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cắt BC tại M, N và cắt AB, AC theo thứ tự tại P, Q. Xác định tỉ số diện tích phần chung của tam giác và đường tròn với diện tích tam giác.

☐ $\frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$. ☐ $\frac{4\pi+9}{27}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC. Trên hai cạnh AB và AC, lấy hai điểm B_1 và C_1 sao cho :

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{1}{3} \text{ và } \frac{AC_1}{AC}=\frac{1}{2}.$$

Vẽ đường tròn qua ba điểm A, B_1 và C_1. Đường thẳng qua B_1 cắt AC_1 ở D và cắt đường tròn ở E. Biết rằng $AC_1 = 4$, $AD = 1$, $DE = 2$ và $S_{\Delta ABC} = 12$. Tính diện tích ΔB_1C_1E.

☐ 3,5. ☐ 4,5. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho ΔABC biết độ dài các cạnh a, b, c. Các đường phân giác trong của ΔABC cắt các cạnh đối diện tại các điểm A_1, B_1, C_1. Tính diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ theo a, b, c và diện tích S của ΔABC.

☐ $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. ☐ $S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Bài tập 7: Cho ΔABC có $B < 90^0$, đường cao AP và CQ và $\frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}}=\frac{1}{9}$

a. Tính cosB.

☐ $\cos B=\frac{2}{3}$. ☐ $\cos B=\frac{1}{3}$. ☐ Khác.

b. Biết $PQ = 2\sqrt{2}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

☐ $R=\frac{7}{2}$. ☐ $R=\frac{9}{2}$. ☐ Khác.

Bài tập 8: Cho ΔABC nhọn và các đường cao AH, BK, CL. CMR:

$$\frac{S_{HKL}}{S_{ABC}} = 2\cos A\cos B\cos C$$

Bài tập 9: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

$$l_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Bài tập 10: Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, AC và AB lấy các điểm tương ứng A_1, B_1, sao cho:

$$\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{6}, \frac{CB_1}{CA} = \frac{1}{3}, \frac{CA_1}{AB} = \frac{1}{2}.$$

AA_1 và CC_1 cắt nhau tại P, đồng thời hai đường thẳng đó cắt BB_1 tại M, N. Chứng minh rằng:

$$S_{MNP} = S_{A_1MB} + S_{B_1NC} + S_{C_1AP}$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Bài tập 2:

a. $S_{\Delta BMC} = (1 - m)S_0$.

b. $S_{\Delta ABN} = nS_0$.

c. $S_{\Delta AMN} = m.nS_0$.

d. $\frac{m}{1-m}$.

e. $\frac{n}{1-n}$.

f. $S_{\Delta BCD} = \frac{(1-m)(1-n)}{1-mn}$.

Bài tập 3: $\frac{S_2}{S_0} = \frac{4}{13}, \frac{S_2}{S_1} = \frac{64}{91}$.

Bài tập 4: $k = \frac{2\pi\sqrt{3} + 9}{27}$.

Bài tập 5: $S = \frac{7}{2}$.

Bài tập 6: $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Bài tập 7: $\cos B = \frac{1}{3}$ và $R = \frac{9}{2}$.

BÀI TOÁN 10

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác thường.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC ta cần nhớ lại các hệ thức:

1. *Định lý hàm số cosin*
2. *Định lý hàm số sin*
3. *Định lý trung tuyến*
4. *Công thức về diện tích*
5. *Công thức bán kính đường tròn nội tiếp*

và chúng ta đã từng khai thác chi tiết các hệ thức đó để giải một vài dạng toán. Bài toán được trình bày trong mục này chỉ mang tính tổng hợp hơn, tức là chúng ta sẽ vận dụng linh hoạt các hệ thức cũng như các định lý đã biết trong tam giác thường. Vẫn với các dạng toán thường gặp, nhưng sẽ tổng quát hơn:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Cho ΔABC có $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$.

a. Tính đường cao h_a.

b. Tính trung tuyến m_a.

Giải

a. Ta tính h_a bằng hai cách:

Cách 1: Ta có:

$$16S^2 = (8 + 7 + 6)(8 + 7 - 6)(7 + 6 - 8)(6 + 8 - 7) = 21.9.5.7 = 9.49.15$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{21\sqrt{15}}{4}.$$

Suy ra:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{21\sqrt{15}}{2.7} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

Cách 2: Ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 36 - 64}{1.7.6} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4},$$

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$h_a = c.\sin B = 6.\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

b. Áp dụng định lý về trung tuyến, ta được:

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}) = \frac{1}{2}(36 + 64 - \frac{49}{2}) = \frac{151}{4}$$

$$\Leftrightarrow m_a = \frac{\sqrt{151}}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho ΔABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Tính:

a. Diện tích S của tam giác.

b. Các đường cao h_a, h_b, h_c.

c. Các bán kính R, r.

Giải

a. Ta có:

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow p - a = \frac{1}{2}, p - b = \frac{3}{2}, p - c = \frac{5}{2}.$$

Do đó:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{9}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

b. Ta có:

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.\frac{3}{4}\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{8}.$$

$$S = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2.\frac{3}{4}\sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2.\frac{3}{4}\sqrt{15}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

c. Ta có:

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{4.3.2}{4.\frac{3}{4}\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{15}}{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

Ví dụ 3. Cho ba số a, b, c thoả mãn:

$$a = x^2 + x + 1, b = 2x + 1, c = x^2 - 1.$$

a. Xác định x để a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC.

b. Với điều kiện của a), hãy xác định số đo của góc A.

Giải

a. Để a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC, ta cần có:

$$0 < a + b - c = x^2 + x + 1 + (2x + 1) - (x^2 - 1) = 3x + 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}. \quad (1)$$

$$0 < a + c - b = x^2 + x + 1 + (x^2 - 1) - (2x + 1) = 2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. . (2)$$

$$0 < b + c - a = (2x + 1) + (x^2 - 1) - (x^2 + x + 1) = x - 1 \Leftrightarrow x > 1. (3)$$

Kết hợp (1), (2), (3), ta được điều kiện là $x > 1$.

b. Ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 120^0.$$

Ví dụ 4. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{tgA}{tgB} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}.$$

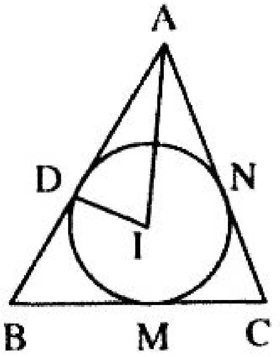
Giải

Áp dụng định lý hàm số cosin và hàm số sin, ta có:

$$\frac{tgA}{tgB} = \frac{\sin A.\cos B}{\cos A.\sin B} = \frac{\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}}{\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$$

Ví dụ 5. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$r = \frac{a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}.$$



Giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, (I) tiếp xúc với các cạnh BC, AC, AB tại M, N, D.

Áp dụng định lý hàm số sin đối với ΔBIC:

$$\frac{IB}{\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} \Rightarrow \frac{IB}{\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin\left(\pi - \dfrac{B + C}{2}\right)} = \frac{BC}{\sin\dfrac{B + C}{2}} = \frac{BC}{\cos\dfrac{A}{2}}. \quad (1)$$

Mặt khác, trong ΔIMB ta có:

$$IB = \frac{r}{\sin\dfrac{B}{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$\frac{r}{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}} = \frac{a}{\cos\dfrac{A}{2}} \Rightarrow r = \frac{a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}, \text{đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có $\dot{A} = 60^0$, $h_c = \sqrt{3}$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 5. Tính các cạnh của tam giác.

Bài tập 2: Cho ba số a, b, c thoả mãn:

$$a = x^2 + 2,\ b = x^2 - 2x + 2,\ c = x^2 + 2x + 2.$$

a. Xác định x để a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC.

b. Với điều kiện của a), hãy chứng minh rằng:

- $r = \dfrac{\sqrt{3(x^4 - 12x^2 + 4)}}{6}$.
- $r = 3h_a$.
- $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Bài tập 3: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$.

b. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 2bc\sin(B + C)$

Bài tập 4: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)R}{abc}$

b. $(a - b)\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2} + (b - c)\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2} + (a - c)\operatorname{cotg}\dfrac{B}{2} = 0$

Bài tập 5: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $p = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

b. $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

c. $\dfrac{r}{p} = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

Bài tập 6: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $1 + \dfrac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

b. $c^2 = (a - b)^2 + 4S.\dfrac{1 - \cos C}{\sin C}$

Bài tập 7: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

b. $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$

Bài tập 8: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $S = p(p - a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

b. $S = \dfrac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

Bài tập 9: Cho ΔABC có trung tuyến $AM = \frac{c}{2}$. Chứng minh rằng:

a. $a^2 - c^2 = 2b^2$

b. $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$

Bài tập 10: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. Nếu $a + c = 2b$ thì:

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

b. Nếu $a + c = 2b$ thì

$$2(c - a) = 3r(tg\frac{C}{2} - tg\frac{A}{2})$$

c. Nếu $a^2 + c^2 = 2b^2$ thì

$$2cotgB = cotgC + cotgA$$

Bài tập 11: Cho ΔABC, có các cạnh thoả mãn $a^4 = b^4 + c^4$. CMR ΔABC nhọn và các góc thoả mãn:

$$2\sin^2 A = tgB.tgC.$$

Bài tập 12: Cho ΔABC, AD là phân giác trong của góc A; D_1 là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB. Chứng minh rằng:

$$AD_1 = \frac{2p(p-a)}{b+c}$$

Bài tập 13: Đường tròn nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{pr^2}{2R}.$$

Bài tập 14: Cho ΔABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và 3 cạnh BC = a, CA = b, AB = c.

a. Chứng minh rằng chu vi ΔA'B'C' bằng acosA + bcosB + ccosC

b. Chứng minh rằng $R_{A'B'C'} = \frac{1}{2} R_{ABC}$

Bài tập 15: Cho ΔABC nhọn. AA_1 là đường cao xuất phát từ A, H là trực tâm và G là trọng tâm tam giác. CMR:

a. $tgB.tgC = \frac{AA_1}{HA_1}$.

b. $HG//BC \Leftrightarrow tgB.tgC = 3$

Bài tập 16: Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp có tâm I, bán kính r. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, IBC, ICA, IBA có bán kính lần lượt là R, R_1, R_2, R_3. Chứng minh rằng:

$$R_1R_2R_3 = 2R^2.r$$

BÀI TOÁN 11

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, ta có các hệ thức sau:

1. (*Định lý Pitago*): $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
2. (*Định lý hình chiếu*): $AB^2 = BH.BC$.

   $AC^2 = CH.BC$.
3. Công thức đường cao: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.
4. Công thức diện tích: $S = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC$.
5. Các tỉ số lượng giác:

$$\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC}, \sin C = \cos B = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{tg}B = \text{cotg}C = \frac{AC}{AB}, \text{cotg}B = \text{tg}C = \frac{AB}{AC},$$

dựa vào các hệ thức trên để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác vuông là:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác vuông.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác vuông.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, AB = 3, AC = 4, AH là đường cao. Tính BC, BH, CH và AH.

Giải

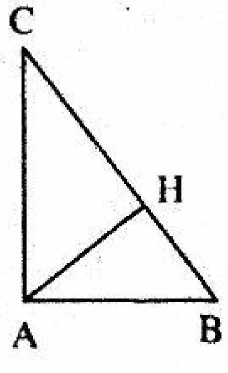
Ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5}.$$

$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5}$$

$$AH^2 = HB.HC \Leftrightarrow AH = \sqrt{HB.HC} = \sqrt{\frac{9}{5}.\frac{16}{5}} = \frac{12}{5}.$$



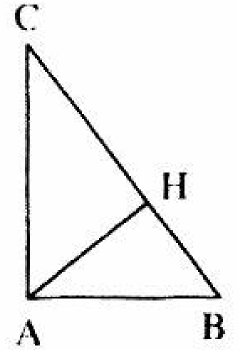
Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A, $\text{tg}C = \frac{2}{3}$ và đường cao AH = 6. Tính độ dài các đoạn HB, HC, AB, AC.

Giải

Hai ΔAHB và ΔCHA đồng dạng, do đó:

$$\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{AC} = tgC = \frac{2}{3} \Rightarrow HC = \frac{3}{2}AH = 9.$$

$$\frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC} = tgC = \frac{2}{3} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}AH = 4.$$



Trong ΔABC, ta có:

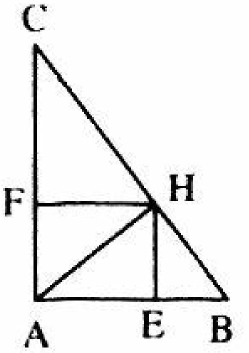
$$AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow AB = \sqrt{BH.BC} = \sqrt{4(4+9)} = 2\sqrt{13}.$$

$$AC^2 = CH.BC \Leftrightarrow AC = \sqrt{CH.BC} = \sqrt{9(4+9)} = 3\sqrt{13}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC vuông tại A; AH là đường cao. HE, HF lần lượt là các đường cao của ΔAHB, ΔAHC. Chứng minh rằng:

a. $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$.

b. $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.



Giải

a. Ta có:

$$\begin{aligned}3AH^2 + BE^2 + CF^2 &= 3AH^2 + BH^2 - HE^2 + CH^2 - HF^2.\\ &= 3AH^2 - EF^2 + (BH + HC)^2 - 2HB.HC.\\ &= 2AH^2 + BC^2 - 2AH^2 = BC^2.\end{aligned}$$

b. Trong ΔAHB:

$$BE = \frac{BH^2}{BA} \Rightarrow BE^2 = \frac{BH^4}{BA^2} = \frac{BH^4}{BH.BC} = \frac{BH^3}{BC} \qquad (1)$$

Trong ΔAHC:

$$CF = \frac{CH^2}{CA} \Rightarrow CF^2 = \frac{CH^4}{CA^2} = \frac{CH^4}{CH.BC} = \frac{CH^3}{BC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \frac{BH}{\sqrt[3]{BC}} + \frac{CH}{\sqrt[3]{BC}} = \frac{BC}{\sqrt[3]{BC}} = \sqrt[3]{BC^2}.$$

Ví dụ 4: Cho hai tam giác vuông ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A và A_1 và đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng:

a. $aa_1 = bb_1 + cc_1$.

b. $\frac{1}{hh_1} = \frac{1}{bb_1} + \frac{1}{cc_1}$.

Giải

a. Trong ΔABC, ta có: $b = a\cos\alpha$, $c = a\sin\alpha$,

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có: $b_1 = a_1.\cos\alpha$, $c_1 = a_1.\sin\alpha$

Từ đó suy ra:

$$bb_1 + cc_1 = aa_1.\cos^2\alpha + aa_1.\sin^2\alpha = aa_1.(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = aa_1,$$ đpcm.

b. Trong ΔABC, ta có: $b = \frac{h}{\sin\alpha}$, $c = \frac{h}{\cos\alpha}$.

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$b_1 = \frac{h_1}{\sin\alpha},\ c_1 = \frac{h_1}{\cos\alpha}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{bh_1} + \frac{1}{cc_1} = \frac{1}{\frac{hh_1}{\sin^2\alpha}} + \frac{1}{\frac{hh_1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{hh_1} = \frac{1}{hh_1}\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 5: Cho ΔABC, biết

$$S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a - b + c). \qquad (1)$$

Chứng minh rằng ΔABC là vuông.

Giải

Sử dụng công thức Hêrông, ta biến đổi (1) về dạng:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-c)(p-b)$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2$$

$$\Leftrightarrow p(p-a) = (p-c)(p-b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = (a+b-c)(a+c-b)$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là vuông tại A.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, AB = 15, AC = 20, AH là đường cao.

a. Tính độ dài BC.

☐ BC = 25. ☐ BC = 15. ☐ Khác.

b. Tính độ dài BH.

☐ BH = 9. ☐ BH = 12. ☐ Khác.

c. Tính độ dài CH.

☐ CH = 12. ☐ CH = 16. ☐ Khác.

d. Tính độ dài AH.

☐ AH = 12. ☐ AH = 14. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng $AH = \frac{6\sqrt{13}}{13}$, BC = 13.

a. Tính độ dài AB.

☐ AB = 2. ☐ AB = 3. ☐ Khác.

b. Tính độ dài AC.

☐ AC = 3. ☐ AC = 2. ☐ Khác.

c. Tính độ dài HB.

☐ $HB = \frac{4}{13}$. ☐ $HB = \frac{9}{13}$. ☐ Khác.

d. Tính độ dài HC.

☐ $HC = \frac{9}{13}$. ☐ $HC = \frac{4}{13}$. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho ΔABC vuông tại A, $tgC = \frac{3}{4}$ và đường cao $AH = 12$.

a. Tính độ dài đoạn HB.

☐ $HB = 9$. ☐ $HB = 8$. ☐ Khác.

b. Tính độ dài đoạn CH.

☐ $CH = 26$. ☐ $CH = 16$. ☐ Khác.

c. Tính độ dài cạnh AB.

☐ $AB = 14$. ☐ $AB = 15$. ☐ Khác.

d. Tính độ dài cạnh AC.

☐ $AC = 20$. ☐ $AC = 22$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng $BH = 1$, $AC = 2a\sqrt{5}$.

a. Tính độ dài cạnh BC.

☐ $BC = 6$. ☐ $BC = 5$. ☐ Khác.

b. Tính độ dài cạnh AB.

☐ $AB = 2$. ☐ $AB = \sqrt{5}$. ☐ Khác.

c. Tính độ dài đường cao AH.

☐ $AH = 2$ ☐ $AH = 3$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 3$, $AC = 4$, đường cao AH. Điểm I thuộc cạnh AB sao cho $IA = 2IB$, CI cắt AH tại E. Tính độ dài CE.

☐ $CE = \frac{16\sqrt{5}}{11}$. ☐ $CE = \frac{16\sqrt{5}}{7}$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, M nằm trên nửa đường tròn và $\widehat{BAM} = \alpha$ $(0 < \alpha < 45^0)$. Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M cắt AB tại N. Tính các cạnh của ΔAMN.

a. $AM = 2R.\cos\alpha$, $MN = R.tg2\alpha$, $AN = \frac{R(1 + \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha}$.

b. $AM = 2R.\sin\alpha$, $MN = R.cotg2\alpha$, $AN = \frac{R(1 + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$.

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A. Chứng minh:

a. $\cos(B - C) = \frac{2bc}{a^2}$. b. $tg\frac{B}{2} = \frac{b}{a + c}$.

Bài tập 8: Cho ΔABC vuông tại A, cạnh góc vuông là b, c. M là một điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = \alpha$. Chứng minh rằng:

$$AM = \frac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}.$$

Bài tập 9: Cho ΔABC vuông tại A; AD là phân giác trong của $\hat{A}$. Chứng minh rằng:

$$AD = \frac{\sqrt{2}}{b + c}bc.$$

Bài tập 10: Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH; r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC, AHB, AHC. Chứng minh rằng:

$$r_1 = r\frac{c}{a} \text{ và } r_2 = r\frac{b}{a}$$

từ đó suy ra:

$$r_1^2 + r_1^2 = r^2$$

Bài tập 11: Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là nửa chu vi của các ΔABC, ΔHAB, ΔHAC thoả mãn:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

Chứng minh rằng ΔABC vuông.

Bài tập 12: Cho ΔABC vuông tại A; D là hình chiếu của A trên BC; E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC. Chứng minh rằng:

a. $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC}$; $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3 = \frac{BE}{CF}$.

b. $AD^3 = BC.EB.CF$.

Bài tập 13: Cho ΔABC, biết

$$3\sin A + 4\cos A = 3,$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông.

Bài tập 14: Cho ΔABC, biết

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2,$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $BC = 25$, $BH = 9$, $CH = 16$, $AH = 12$.

Bài tập 2: Ta có hai đáp số:

$$AB = 2,\ AC = 3,\ HB = \frac{4}{13},\ HC = \frac{9}{13}$$

hoặc $AB = 3,\ AC = 2,\ HB = \frac{9}{13},\ HC = \frac{4}{13}$.

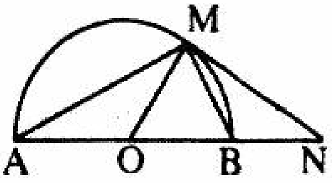
Bài tập 3: $HB = 9$, $CH = 16$, $AB = 15$, $AC = 20$.

Bài tập 4: $BC = 5$, $AB = \sqrt{5}$, $AH = 2$.

Bài tập 5: $CE = \frac{16\sqrt{5}}{11}$.

Bài tập 6:

Trong ΔAMB, ta có: $AM = AB.\cos\widehat{BAM} = 2R.\cos\alpha$.



Trong ΔOMN, ta có:

$$MN = OM.\text{tg}\,\widehat{MON} = R.\text{tg}2\alpha,$$

$$ON = \frac{OM}{\cos\widehat{MON}} = \frac{R}{\cos 2\alpha}.$$

Do đó:

$$AN = AO + ON = R + \frac{R}{\cos 2\alpha} = \frac{R(1+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha}$$

BÀI TOÁN 12

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC CÂN

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác cân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC cân tại A, ta có:

- AB = AC,
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$,
- Với K là trung điểm BC thì AK vừa là trung tuyến, đường cao, trung trực, phân giác

ing với việc vận dụng linh hoạt các hệ thức lượng trong tam giác thường và đặc ệt là tam giác vuông để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác cân là:

Dạng 1: Tính toán các yếu tố trong tam giác cân.

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức trong tam giác cân.

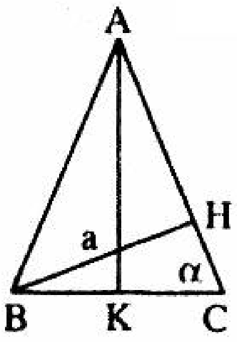
. VÍ DỤ MINH HOẠ

í dụ 1: Cho ΔABC cân tại A. Đường cao BH = a, $\widehat{ABC} = \alpha$.

a. Tính các cạnh và đường cao còn lại.

b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải



Trong ΔHBC, ta được:

$$\sin\alpha = \frac{BH}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{BH}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Trong ΔKAB, ta được:

$$\cos\alpha = \frac{BK}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{BK}{\cos\alpha} = \frac{\frac{BC}{2}}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha},$$

$$\sin\alpha = \frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AK = AB.\sin\alpha = \frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha}.\sin\alpha = \frac{a}{2\cos\alpha}.$$

Ta có:

$$AC = 2R.\sin B \Leftrightarrow R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{\frac{a}{2\sin\alpha.\cos\alpha}}{2\sin\alpha} = \frac{a}{4\sin^2\alpha.\cos\alpha}.$$

$$S_{\Delta ABC} = pr \Leftrightarrow r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}BH.AC}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{a}{2(1+\cos\alpha)}.$$

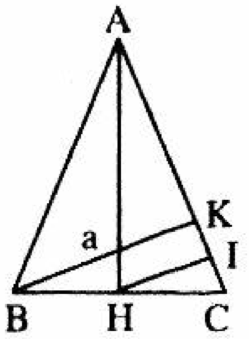
'í dụ 2: Cho ΔABC cân đỉnh A, đường cao AH, BK. CMR:

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$$

Giải

Dựng HI⊥AC, suy ra HI là đường trung bình của ΔKBC, do đó:

$$HI = \frac{1}{2}BK.$$



Trong ΔHAC, ta có:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HA^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\frac{1}{2}BK)^2} = \frac{1}{(\frac{BC}{2})^2} + \frac{1}{HA^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$$, đpcm.

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết

$$2\sin^4A + 2\sin^4B + \sin^4C = 2(\sin^2A + \sin^2B)\sin^2C,$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông cân.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin cho ΔABC, ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$2.\left(\frac{a}{2R}\right)^4 + 2.\left(\frac{b}{2R}\right)^4 + \left(\frac{c}{2R}\right)^4 = 2.\left[\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2\right].\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c^4 + 2(a^4 + b^4) - 2(a^2 + b^2)c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2(a^4 + b^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow [c^2 - (a^2 + b^2)]^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - (a^2 + b^2) = 0 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ a = b \end{cases}$$

⇔ ΔABC là vuông cân tại C.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có AB = AC = a, $\widehat{BAC} = \alpha$

a. Tính BC.

☐ $BC = 2a.\sin\frac{\alpha}{2}$. ☐ $BC = 2a.\cos\frac{\alpha}{2}$. ☐ Khác.

b. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

☐ $r = \frac{a\sin\alpha}{2(1-\sin\frac{\alpha}{2})}$. ☐ $r = \frac{a\sin\alpha}{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho ΔABC cân tại A. Đường cao BH = 4, $\widehat{ABC} = 30^0$.

a. Tính các cạnh ΔABC.

☐ $BC = 8, AB = AC = \frac{6}{\sqrt{3}}$. ☐ $BC = 8, AB = AC = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Đường cao AK.

☐ $AK = \frac{4}{\sqrt{3}}$. ☐ $AK = \frac{5}{\sqrt{3}}$. ☐ Khác.

Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

☐ $r = \frac{4}{2\ \sqrt{3}}, R = \frac{6}{\sqrt{3}}$. ☐ $r = \frac{4}{2+\sqrt{3}}, R = \frac{8}{\sqrt{3}}$. ☐ Khác.

ài tập 3: Cho ΔABC cân tại A, có AB=AC=2, $\widehat{ABC} = 30^0$. Gọi H là trực tâm ABC, BK là đường cao.

Tính AH.

☐ AH = 2. ☐ AH = 3. ☐ Khác.

Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABK.

☐ $r = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$. ☐ $r = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. ☐ Khác.

ài tập 4: Cho ΔABC cân tại A, CD là đường cao vẽ từ C. CMR:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = BD^2 + 2AD^2 + 3CD^2.$$

ài tập 5: Cho ΔABC cân đỉnh A, có BC = a và đường cao AH = h. Gọi K là hình iếu của B lên cạnh AC.

a. Tìm điều kiện giữa a và h để điểm K thuộc cạnh AC.

b. Giả sử điều kiện này được thoả mãn, tính AK.

c. BK cắt AH tại điểm O. Tính AO.

HƯỚNG DẪN

i tập 1: $BC = 2a.\sin\frac{\alpha}{2}, r = \frac{a\sin\alpha}{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}$.

i tập 2: $BC = 8, AB = AC = \frac{8}{\sqrt{3}}, AK = \frac{4}{\sqrt{3}}, r = \frac{4}{2+\sqrt{3}}, R = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

i tập 3: $AH = 2, r = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

BÀI TOÁN 13

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Hệ thức lượng trong tam giác đều.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho ΔABC đều cạnh bằng a, ta luôn có:

a. $A = B = C = 60^0$.

b. Với E là trung điểm BC thì AE vừa là trung tuyến, đường cao, ph giác và trung trực và $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c. Trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn nội tiếp I, tâm đường tr ngoại tiếp O trùng nhau.

d. $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Dựa vào các kết quả trên để giải hai dạng toán cơ bản của tam giác đều là:

1. Tính toán các yếu tố trong tam giác đều.
2. Chứng minh tam giác là đều.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Vì việc tính toán các yếu tố của tam giác đều thông thường chỉ thuần tuý bả việc sử dụng công thức, do đó trong mục này chúng ta sẽ quan tâm nhiều tới l toán nhận dạng tam giác đều.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu ΔABC có các cạnh thoả mãn:

$$(p - a)(p - b)(p - c) = 8abc,$$

thì ΔABC đều.

Giải

Ta biến đổi hệ thức về dạng:

$$(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) = abc. \quad (1)$$

Ta có nhận xét:

$$0 < a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) \le a^2. \quad (2)$$

$$0 < b^2 - (a - c)^2 = (b - a + c)(b + a - c) \le b^2. \quad (3)$$

$$0 < c^2 - (a - b)^2 = (c - a + b)(c + a - b) \le c^2. \quad (4)$$

Nhân theo vế của (2), (3), (4), ta được:

$$(b + c - a)^2(a + c - b)^2(a + b - c)^2 \le a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \le abc. \quad (5)$$

Vậy để có (1) thì dấu "=" phải xảy ra tại (5)

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu ΔABC thoả mãn:

$$S = \frac{2R^2}{3}(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$$

thì ΔABC đều.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin và $S = \frac{abc}{4R}$, ta biến đổi hệ thức về dạng:

$$\frac{abc}{4R} = \frac{2R^2}{3}\left(\frac{a^3}{8R^3} + \frac{b^3}{8R^3} + \frac{c^3}{8R^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3abc = a^3 + b^3 + c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - a)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu ΔABC thoả mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 & (1) \\ a = 2b\cos C & (2) \end{cases}$$

thì ΔABC đều.

Giải

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^3 = a^2b + a^2c - a^3 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) = (b + c)a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2\text{-}bc\text{+}c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2\text{-}bc\text{+}c^2 = b^2\text{+}c^2\text{-}2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^0 \ (0^0 < A < 180^0) \qquad (3)$$

Mặt khác:

$$(2) \Rightarrow \cos C = \frac{a}{2b}$$

Suy ra:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 2ab\frac{a}{2b} = b^2$$

$$\Rightarrow b = c \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra tam giác ABC đều.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. $ab + bc + ca = 9R^2$.

b. $ab + bc + ca = 36r^2$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

a. $a^2 + b^2 + c^2 = 4S\sqrt{3}$

b. $a^4 + b^4 + c^4 = 16S^2$.

c. $(b^2 + c^2 - a^2).a + (c^2 + a^2 - b^2).b + (a^2 + b^2 - c^2).c = 3abc$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}.$$

Bài tập 4: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$h_a + h_b + h_c = 9r.$$

Bài tập 5: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}.$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{l_a + l_b}{c} + \frac{l_b + l_c}{a} + \frac{l_c + l_a}{b} = 3\sqrt{3}.$$

Bài tập 7: Chứng minh rằng ΔABC đều, nếu thoả mãn:

$$\frac{a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C}{a.\sin B + b.\sin C + c.\sin A} = \frac{2p}{9R}.$$

BÀI TOÁN 14

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TỨ GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Độ dài đường cao trong tam giác và ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

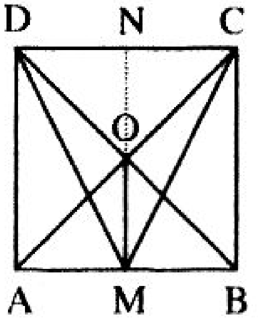
Chúng ta chuyển các yêu cầu của tứ giác về các tam giác đơn, rồi sử dụng các hệ thức đã biết trong tam giác để giải.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: hình vuông ABCD tâm O cạnh bằng a, gọi M là trung điểm AB. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của các ΔMCD, MBD, ΔMOC.

Giải

- Trong ΔMCD, ta có:



$$2R_{\Delta MCD} = \frac{MC}{\sin\widehat{MDC}} = \frac{MC}{\dfrac{MN}{DM}} = \frac{MC^2}{MN}$$

$$= \frac{BC^2 + BM^2}{MN} = \frac{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}{a} = \frac{5a}{4}$$

$$\Leftrightarrow R_{\Delta MCD} = \frac{5a}{8}.$$

- Trong ΔMBD, ta có:

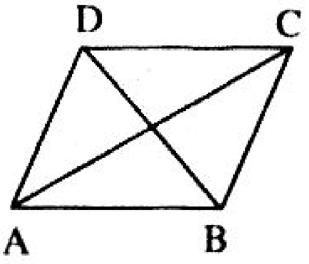
$$2R_{\Delta MBD} = \frac{MD}{\sin MBD} = \frac{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}}{\sin 45^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow R_{\Delta MBD} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

- Trong ΔMOC, ta có:

$$2R_{\Delta MOC} = \frac{MC}{\sin\widehat{MOC}} = \frac{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}}}{\sin 135^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow R_{\Delta MOC} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD có AB = a, BC = b. Tính $BD^2 + AC^2$ theo a và b.

Giải



- Trong ΔACD, ta có:

$$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2DA.DC.\cos\widehat{ADC}$$

$$= b^2 + a^2 - 2ab.\cos\widehat{ADC}. \quad (1)$$

- Trong ΔABD, ta có:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD.AB.\cos\widehat{BAD}$$

$$= b^2 + a^2 - 2ab.\cos(180^0 - \widehat{ADC})$$

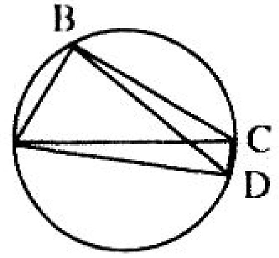
$$= b^2 + a^2 + 2ab.\cos\widehat{ADC}. \qquad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$BD^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Ví dụ 3: Tứ giác ABCD có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$, $AB = a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 60^0$. Tính cạnh AC.

Giải



Từ giả thiết ta nhận thấy tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC và nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD thì:

$$AC = 2R = \frac{BD}{\sin\widehat{BAD}}. \qquad (1)$$

Trong ΔABD, ta có:

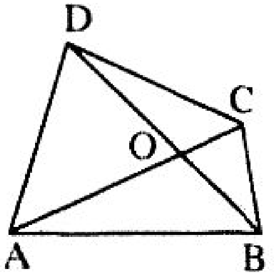
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\widehat{BAD} = 7a^2 \Leftrightarrow BD = a\sqrt{7}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$AC = \frac{a\sqrt{7}}{\sin 60^0} = \frac{2a\sqrt{21}}{3}.$$

Ví dụ 4: Cho tứ giác lồi ABCD, biết góc xen giữa hai đường chéo bằng α. Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha.$$



Giải

Ta có:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCD} + S_{\Delta ODA}$$

$$= \frac{1}{2}OA.OB.\sin\alpha + \frac{1}{2}OB.OC.\sin(180^0 - \alpha) + $$

$$+ \frac{1}{2}OC.OD.\sin\alpha + \frac{1}{2}OD.OA.\sin(180^0 - \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(OA + OC).OB.\sin\alpha + \frac{1}{2}(OC + OA).OD.\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}AC.OB.\sin\alpha + \frac{1}{2}AC.OD.\sin\alpha = \frac{1}{2}AC.(OB + OD).\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha, \text{ dpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Biết rằng tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC, BD = a, $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CAD} = \beta$.

a. Tính AC

☐ $AC = \dfrac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$ ☐ $AC = \dfrac{a}{\cos(\alpha + \beta)}$ ☐ Khác.

b. Tính diện tích tứ giác ABCD theo a, α, β

☐ $S_{ABCD} = \dfrac{a^2.\cos(\alpha - \beta)}{2\sin(\alpha + \beta)}$. ☐ $S_{ABCD} = \dfrac{a^2.\cos(\alpha - \beta)}{2\sin(\alpha + \beta)}$. ☐ Khác.

Bài tập 2: Cho hình vuông ABCD. Một đường thẳng d đi qua A cắt cạnh BC tại M và CD tại I. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2}.$$

Bài tập 3: Cho tứ giác ABCD. I, J theo thứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2.$$

Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình bình hành.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $AC = \dfrac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$, $S_{ABCD} = \dfrac{a^2.\cos(\alpha - \beta)}{2\sin(\alpha + \beta)}$.

CHỦ ĐỀ 4

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

1 PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

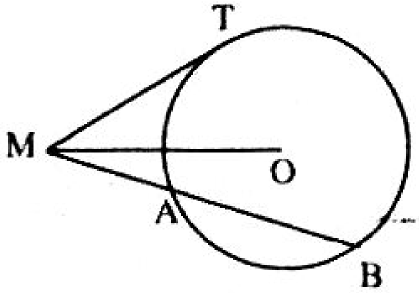
1.1. Định nghĩa

Cho đường tròn (O), bán kính R và một điểm M.

- Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O) là số thực OM^2-R^2, kí hiệu là $\mathscr{P}_{M/(O)}$. Vậy:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2.$$

1.2. Định lý



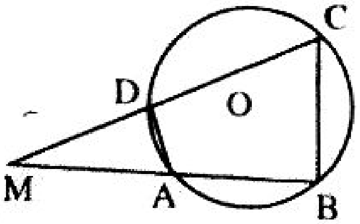
a. Cho đường tròn (O, R) và một điểm M. Vẽ cát tuyến MAB tuỳ ý với đường tròn (A, B nằm trên đường tròn), ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{AM}\,.\,\overline{BM}$$

b. Nếu điểm M ở ngoài đường tròn (O, R), vẽ tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm) thì:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2.$$

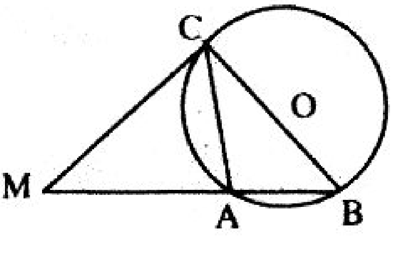
2. TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN



Định lý: Cho tứ giác ABCD, AB và CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để ABCD nội tiếp đường tròn là:

$$\overline{AM}\,.\,\overline{BM} = \overline{CM}\,.\,\overline{DM}$$

3. ĐIỀU KIỆN ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC ĐƯỜNG TRÒN



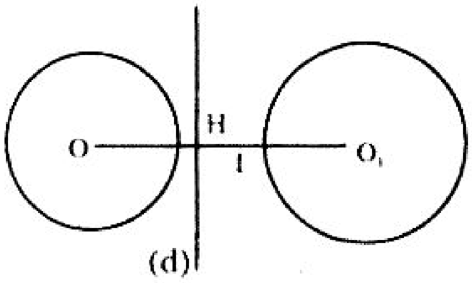
Định lý: Cho tam giác ABC, M là một điểm thuộc đường thẳng AB (M ngoài đoạn AB). Điều kiện cần và đủ để MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C là:

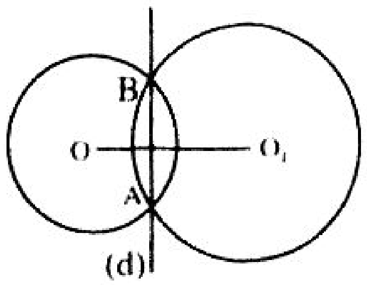
$$\overline{AM}\,.\,\overline{BM} = MC^2$$

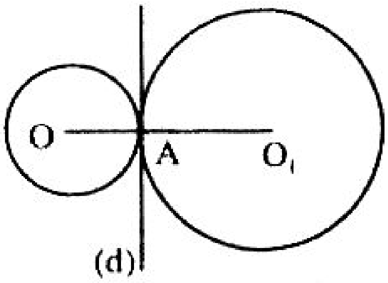
4. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

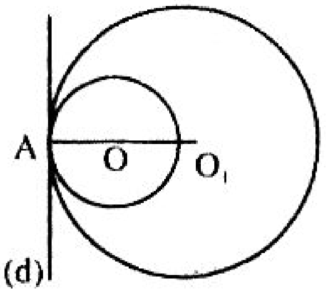
Định lý: Cho hai đường tròn không đồng tâm (O, R) và (O_1, R_1). Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đã cho là một đường thẳng (Δ) vuông góc với đường nối tâm OO_1 tại điểm H với

$$\overline{HI} = \frac{R^2 - R_1^2}{2OO_1},$$ I là trung điểm đoạn OO_1.









5. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1: Tính phương tích của một điểm đối với một đường tròn.

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức phương tích.

Dạng 3: Chứng minh tứ giác nội tiếp đường tròn.

Dạng 4: Chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.

Dạng 5: Chứng minh tính chất hình học.

Dạng 6: Trục đẳng phương của hai đường tròn và các bài toán liên quan.

Dạng 7: Tập hợp điểm.

BÀI TOÁN 1

TÍNH PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tính phương tích của một điểm đối với một đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các kết quả sau:

$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$, với O là tâm đường tròn và R là bán kính

$= \overline{AM}.\overline{BM}$, với A, B∈(O) và A, B, M thẳng hàng.

$= MT^2$, với T∈(O) và MT tiếp xúc với (O) (hoặc MT⊥OT)

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

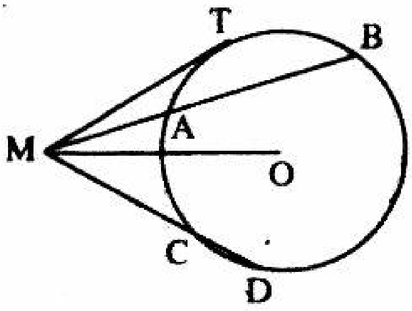
Ví dụ 1: Cho đường tròn tâm O bán kính bằng 7 và điểm M mà OM = 11.

a. Tính phương tích của điểm M đối với đường tròn (O).

b. Qua M, kẻ tiếp tuyến MT đến (O), T là tiếp điểm. Tính MT.

c. Qua M, kẻ hai cát tuyến MAB và MCD.
  - Biết MA = 6, hãy tính M B.
  - Biết CD = 1, hãy tính MC và MD.

Giải



a. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2 = 11^2 - 7^2 = 72.$$

b. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2 = 72 \Leftrightarrow MT = 6\sqrt{2}.$$

c. Ta lần lượt tính

- Tính MB, ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MA.MB = 72$$

$$\Leftrightarrow MB = \frac{72}{MA} = 12.$$

- Tính MC, MD, ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MC}.\overline{MD} = MC.MD = 72$$

$$\Leftrightarrow MC(MC + CD) = 72$$

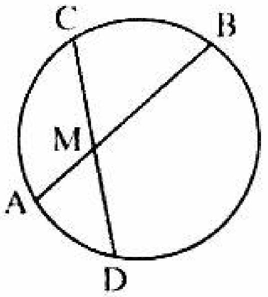
$$\Leftrightarrow MC^2 + MC - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} MC = 8 \\ MC = -9 \text{ loại} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} MC = 8 \\ MD = 9 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Hai dây AB và CD trong đường tròn tâm O cắt nhau tại điểm M (M nằm trong đường tròn). Tính MC và MD biết:

a. MA = 12, MB = 16, CD = 2MB và MC < MD.

b. MA = 12, 2MB = 3MA, 8MC = 3MD.

Giải



Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD}$$

$$\Leftrightarrow MC.MD = MA.MB.$$

a. Theo giả thiết ta có:

$$MC.MD = 12.16 = 192. \qquad (1)$$

Ta có:

$$CD = 2MB \Leftrightarrow MC + MD = 32. \qquad (2)$$

Xét hệ phương trình tạo bởi (1), (2):

$$\begin{cases} MC + MD = 32 \\ MC.MD = 192 \end{cases}$$

suy ra MC, MD là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 32t + 192 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 24 \\ t = 8 \end{array}\right. \overset{MC<MD}{\Rightarrow} \begin{cases} MC = 8 \\ MD = 24 \end{cases}.$$

b. Theo giả thiết ta có:

$$MB = 18,$$

$$MC.MD = 12.18 = 216. \qquad (3)$$

Cũng lại từ giả thiết:

$$8MC = 3MD \Leftrightarrow MC = \frac{3}{8}MD. \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được:

$$\frac{3}{8}MD.MD = 216 \Leftrightarrow MD^2 = 576$$

$$\Leftrightarrow MD = 24 \Rightarrow MC = 9.$$

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn (O, R) và (I, R_1) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm A và dây AB của (O) có độ dài bằng R.

a. Tính $\mathscr{P}_{B/(I)}$, từ đó suy ra độ dài đoạn thẳng BT tiếp xúc với (I) tại T.

b. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O. Tính $\mathscr{P}_{D/(I)}$.

Giải

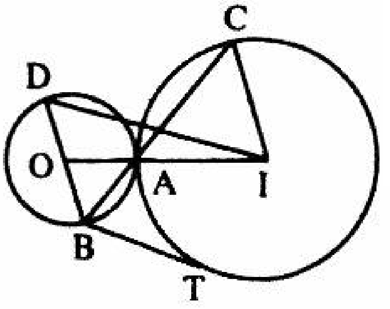
a. Kéo dài AB cắt (I) tại C vì ΔOAB đều nên

$$\widehat{OAB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{IAC} = 60^0$$

$$\Rightarrow \Delta IAC \text{ đều} \Rightarrow AC = R_1 \Rightarrow BC = R + R_1.$$

Suy ra:

$$\mathscr{P}_{B/(I)} = \overline{BA}\,.\,\overline{BC} = BA.BC = R(R + R_1).$$



Mặt khác ta có:

$$BT^2 = \mathscr{P}_{B/(I)} = R(R + R_1)$$

$$\Rightarrow BT = \sqrt{R(R + R_1)}\,.$$

b. Xét ΔOID, ta có:

$$ID^2 = OD^2 + OI^2 - 2OD.OI.\cos 120^0$$
$$= R^2 + (R + R_1)^2 - 2R.(R + R_1).(-\frac{1}{2})$$
$$= R^2 + (R + R_1)^2 + R.(R + R_1).$$

Khi đó:

$$\mathcal{P}_{D/(I)} = ID^2 - R_1^2 = R^2 + (R + R_1)^2 + R.(R + R_1) - R_1^2.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn tâm O bán kính 5 và điểm M mà OM = 7.

a. Tính phương tích của điểm M đối với đường tròn (O).

☐ $\mathcal{P}_{M/(O)} = 28$. ☐ $\mathcal{P}_{M/(O)} = 24$. ☐ Khác.

b. Qua M, kẻ tiếp tuyến MT đến (O), T là tiếp điểm. Tính MT.

☐ $MT = 2\sqrt{7}$. ☐ $MT = 2\sqrt{6}$. ☐ Khác.

c. Qua M, kẻ hai cát tuyến MAB và MCD.

- Biết MA = 4, hãy tính MB.

☐ MB = 7. ☐ MB = 6. ☐ Khác.

- Biết CD=5, hãy tính MC và MD.

☐ MC = 2, MD = 7. ☐ MC = 3, MD = 8. ☐ Khác.

Bài tập 2: Hai dây AB và CD trong đường tròn tâm O cắt nhau tại điểm M (M nằm trong đường tròn). Tính MC và MD biết:

a. MA = 4, MB = 8, CD = 18 và MC < MD.

☐ MC = 2, MD = 16. ☐ MC = 1, MD = 32. ☐ Khác.

b. MA = 3, MB = 15, $\frac{MC}{MD} = \frac{5}{9}$.

☐ MC = 5, MD = 9. ☐ MC = 10, MD = 18. ☐ Khác.

Bài tập 3: Cho hai đường tròn (O, 1) và (I, 2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm A và dây AB của (O) có độ dài bằng 1.

a. Tính $\mathcal{P}_{B/(I)}$, từ đó suy ra độ dài đoạn thẳng BT tiếp xúc với (I) tại T.

☐ $\mathcal{P}_{B/(I)} = 3$, $BT = \sqrt{3}$. ☐ $\mathcal{P}_{B/(I)} = 4$, BT = 2. ☐ Khác.

b. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O. Tính $\mathcal{P}_{D/(I)}$.

☐ $\mathcal{P}_{D/(I)} = 6$. ☐ $\mathcal{P}_{A/(GBC)} = 9$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có BC = 2, CA = 4, AB = 5, trọng tâm G. Tính $\mathcal{P}_{A/(GBC)}$.

☐ $\mathcal{P}_{A/(GBC)} = 15$. ☐ $\mathcal{P}_{D/(I)} = 11$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (O,R) và(O', $R\sqrt{3}$) cắt nhau tại A và B; BM và BN lần lượt là hai đường kính của (O) và (O').

a. Chứng minh rằng: $\mathscr{P}_{M/(O')} + \mathscr{P}_{N/(O)} = 4OO'^2$.

b. Cho biết OO' = 2R

- Gọi G là trọng tâm của tam giác MAB. Tính $\mathscr{P}_{G/(O')}$.

☐ $\mathscr{P}_{G/(O')} = \dfrac{4R^2}{9}$. ☐ $\mathscr{P}_{G/(O')} = \dfrac{2R^2}{5}$. ☐ Khác.

- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác NAB. Tính $\mathscr{P}_{I/(O)}$.

☐ $\mathscr{P}_{I/(O)} = (9 + 5\sqrt{3})R^2$. ☐ $\mathscr{P}_{I/(O)} = (9 - 5\sqrt{3})R^2$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AE = 3 (E thuộc đoạn BC); EB = 1, EC = 3.

a. Tính $\mathscr{P}_{H/(O)}$, với H là trực tâm của ΔABC.

☐ $\mathscr{P}_{H/(O)} = -3$. ☐ $\mathscr{P}_{H/(O)} = 3$. ☐ Khác.

b. Tính $\mathscr{P}_{G/(O)}$, với G là trọng tâm của ΔABC.

☐ $\mathscr{P}_{G/(O)} = -\dfrac{44}{9}$. ☐ $\mathscr{P}_{G/(O)} = \dfrac{44}{9}$. ☐ Khác.

c. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC ở K. Tính $\mathscr{P}_{K/(O)}$.

☐ $\mathscr{P}_{K/(O)} = -45$. ☐ $\mathscr{P}_{K/(O)} = 45$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: $\mathscr{P}_{M/(O)} = 24$, MT = $2\sqrt{6}$, MB = 6, MC = 3, MD = 8.

Bài tập 2:

a. MC = 2, MD = 16.

b. MC = 5, MD = 9.

Bài tập 3: $\mathscr{P}_{B/(I)} = 3$, BT = $\sqrt{3}$, $\mathscr{P}_{D/(I)} = 9$.

Bài tập 4: $\mathscr{P}_{A/(GBC)} = 15$.

Bài tập 5:

a. Ta có ngay:

$$\mathscr{P}_{M/(O')} + \mathscr{P}_{N/(O)} = MB^2 + NB^2 = 4OB^2 + 4O'B^2 = 4OO'^2.$$

b. $\mathscr{P}_{G/(O')} = \dfrac{4R^2}{9}$, $\mathscr{P}_{I/(O)} = (9+5\sqrt{3})R^2$.

Bài tập 6: $\mathscr{P}_{H/(O)} = -3$, $\mathscr{P}_{G/(O)} = -\dfrac{44}{9}$, $\mathscr{P}_{K/(O)} = 45$.

BÀI TOÁN 2
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC PHƯƠNG TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh đẳng thức phương tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các kết quả sau:

$\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$, với O là tâm đường tròn và R là bán kính

$= \overline{AM}\,.\,\overline{BM}$, với A, B∈(O) và A, B, M thẳng hàng.

$= MT^2$, với T∈(O) và MT tiếp xúc với (O) (hoặc MT⊥OT)

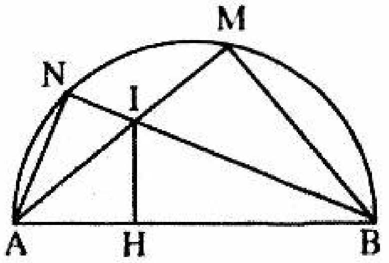
từ đó chuyển đẳng thức phương tích về đẳng thức độ dài đại số hoặc tích vô hướng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho nửa đường tròn đường kính AB với hai dây AM, BN cắt nhau tại I. Chứng minh rằng

$$\mathscr{P}_{A/(IBM)} + \mathscr{P}_{B/(IAN)} = AB^2.$$

Giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AB.

Tứ giác MBHI nội tiếp, bởi $\widehat{BMI} = \widehat{BHI} = 90^0$, do đó:

$\mathscr{P}_{A/(IBM)} = \overline{AH}.\overline{AB} = AH.AB.$ (1)

Tứ giác NAHI nội tiếp, bởi $\widehat{ANI} = \widehat{AHI} = 90^0$, do đó:

$\mathscr{P}_{B/(IAN)} = \overline{BH}.\overline{BA} = BH.BA.$ (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$\mathscr{P}_{A/(IBM)} + \mathscr{P}_{B/(IAN)} = AH.AB + BH.BA = (AH + BH).BA = AB^2$, đpcm.

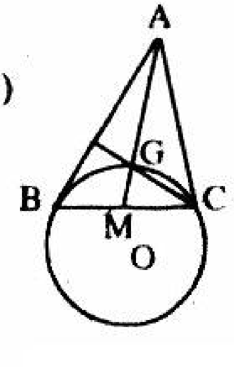
Ví dụ 2: Cho ΔABC có BC = a, CA = b, AB = c, trọng tâm G.

a. Tính $\mathscr{P}_{A/(GBC)}$ theo a, b, c.

b. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)} + \mathscr{P}_{B/(GAC)} + \mathscr{P}_{C/(GAB)} = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Giải



a. Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (GBC), ta có ngay:

$\mathscr{P}_{A/(GBC)} = OA^2 - R^2.$ (1)

Trong ΔABC, ta có:

$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow 9OG^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})$

$$\Leftrightarrow 7R^2 = OA^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}). \qquad (2)$$

Mặt khác ta có:

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}. \qquad (3)$$

$$b^2 = AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 = R^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}. \qquad (4)$$

$$c^2 = AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = R^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} \qquad (5)$$

Cộng theo vế (3), (4), (5), ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 + 2OA^2 - 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}) = 4R^2 + 2OA^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \qquad (6)$$

Thay (6) vào (2), ta được:

$$7R^2 = 3OA^2 + 4R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow OA^2 - R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \qquad (7)$$

Thay (7) vào (1), ta được:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

b. Tương tự cách thực hiện trong a), ta được:

$$\mathscr{P}_{B/(GAC)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

$$\mathscr{P}_{C/(GAB)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

suy ra:

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)} + \mathscr{P}_{B/(GAC)} + \mathscr{P}_{C/(GAB)} = a^2 + b^2 + c^2. \qquad (8)$$

Trong ΔABC, ta có:

$$GA^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \qquad (9)$$

tương tự ta cũng có:

$$GB^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \qquad (10)$$

$$GC^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \qquad (11)$$

Cộng theo vế (9), (10), (11), ta được:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (12)$$

Thay (12) vào (8), ta được:

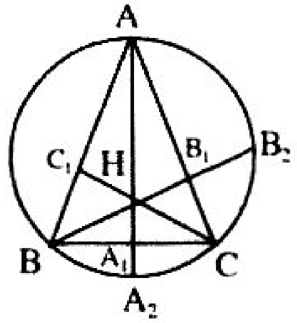
$$\mathscr{P}_{A/(GBC)} + \mathscr{P}_{B/(GAC)} + \mathscr{P}_{C/(GAB)} = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2), \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a. $\overline{HA}.\overline{HA_1} = \overline{HB}.\overline{HB_1} = \overline{HC}.\overline{HC_1}$.

b. $\overline{A_1H}.\overline{A_1A} = \overline{A_1B}.\overline{A_1C}$.

c. $\overline{AH}\,.\,\overline{AA_1}+\overline{BH}\,.\,\overline{BB_1}+\overline{CH}\,.\,\overline{CC_1}=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.



Giải

a. Tứ giác ABA_1B_1 nội tiếp, do đó:

$$\overline{HA}\,.\,\overline{HA_1}=\overline{HB}\,.\,\overline{HB_1}\,. \qquad (1)$$

Tứ giác ACA_1C_1 nội tiếp, do đó:

$$\overline{HA}\,.\,\overline{HA_1}=\overline{HC}\,.\,\overline{HC_1}\,. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b. Gọi A_2 là điểm đối xứng với H qua BC, suy ra $A_2\in(ABC)$, ta được:

$\overline{A_1B}\,.\,\overline{A_1C}=\overline{A_1A_2}\,.\,\overline{A_1A}=\overline{A_1H}\,.\,\overline{A_1A}$, đpcm.

c. Ta có:

$$\overline{AH}\,.\,\overline{AA_1}=\overline{AB}\,.\,\overline{AC_1}=\overline{AC}\,.\,\overline{AB_1}$$

$$\Rightarrow \overline{AH}\,.\,\overline{AA_1}=\frac{1}{2}(\overline{AB}\,.\,\overline{AC_1}+\overline{AC}\,.\,\overline{AB_1}). \qquad (3)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\overline{BH}\,.\,\overline{BB_1}=\frac{1}{2}(\overline{BC}\,.\,\overline{BA_1}+\overline{BA}\,.\,\overline{BC_1}). \qquad (4)$$

$$\overline{CH}\,.\,\overline{CC_1}=\frac{1}{2}(\overline{CA}\,.\,\overline{CB_1}+\overline{CB}\,.\,\overline{CA_1}). \qquad (5)$$

Cộng theo vế (3), (4), (5), ta được:

$$\overline{AH}\,.\,\overline{AA_1}+\overline{BH}\,.\,\overline{BB_1}+\overline{CH}\,.\,\overline{CC_1}=\frac{1}{2}[(\overline{AB}\,.\,\overline{AC_1}+\overline{AC}\,.\,\overline{AB_1})+$$

$$+(\overline{BC}\,.\,\overline{BA_1}+\overline{BA}\,.\,\overline{BC_1})+(\overline{CA}\,.\,\overline{CB_1}+\overline{CB}\,.\,\overline{CA_1})]$$

$$=\frac{1}{2}[\overline{AB}(\overline{AC_1}-\overline{BC_1})+\overline{BC}(\overline{BA_1}-\overline{CA_1})+\overline{CA}(\overline{CB_1}-\overline{AB_1})]$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\text{, đpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đoạn thẳng AB, biết phương tích của A, B và trung điểm I của AB đối với một đường tròn (O) lần lượt là $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$. CMR:

$$\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2+\mathscr{P}_3=\frac{AB^2}{2}.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c. Gọi G là trọng tâm của tam giác.

a. Chứng minh rằng $\mathscr{P}_{G/(ABC)}=-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

b. GA, GB, GC cắt đường tròn (ABC) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{GA_1^2}+\frac{1}{GB_1^2}+\frac{1}{GC_1^2}=\frac{27}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bài tập 3: Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Một điểm M bất kỳ có hình chiếu vuông góc trên AB, CD, AD, BC lần lượt là: H, H', K, K'. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MH}\,.\,\overline{MH'} + \overline{MK}\,.\,\overline{MK'}.$$

Bài tập 4: Cho đường tròn (O, R), CD là một đường kính của đường tròn. Trên đường thẳng CD lấy hai điểm A, B sao cho $\overline{OA}\,.\,\overline{OB} = R^2$. Chứng minh rằng:

a. $\mathscr{P}_{A/(O)} + \mathscr{P}_{B/(O)} = AB^2$.

b. $R^2.(\mathscr{P}_{A/(O)} + \mathscr{P}_{B/(O)}) + \mathscr{P}_{A/(O)}.\mathscr{P}_{B/(O)} = 0$.

Bài tập 5: Cho ΔABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{D/(ABC)} = -\frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Gọi R là bán kính đường tròn (O), ta lần lượt có:

$$\mathscr{P}_1 = OA^2 - R^2, \qquad (1)$$

$$\mathscr{P}_2 = OB^2 - R^2, \qquad (2)$$

$$\mathscr{P}_3 = OI^2 - R^2 = [\frac{1}{2}(OA^2 + OB^2) - \frac{AB^2}{4}] - R^2. \qquad (3)$$

Thay OA^2 từ (1) và OB^2 từ (2) vào (3), ta được:

$$AB^2 = 2(\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 + \mathscr{P}_3) \Leftrightarrow \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 + \mathscr{P}_3 = \frac{AB^2}{2}, \text{ đpcm.}$$

BÀI TOÁN 3

TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tứ giác nội tiếp đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng mệnh đề:

- Nếu hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M và

$$\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD}$$

thì 4 điểm A, B, C, D cùng ở trên một đường tròn.

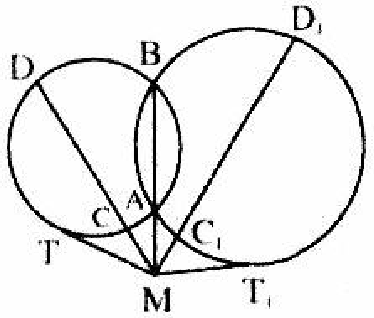
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại hai điểm A và B. Gọi M là một điểm tuỳ ý trên đường thẳng AB (ngoài đoạn AB).

a. Qua M lần lượt dựng các tiếp tuyến MT và MT_1 với (O) và (O_1). Chứng minh rằng $MT = MT_1$.

b. Qua M, dựng hai cát tuyến tuỳ ý MCD và MC_1D_1 với (O) và (O_1). Chứng minh rằng tứ giác CDC_1D_1 nội tiếp đường tròn.

Giải



a. Ta có:

$$MT^2 = MA.MB = MT_1^2 \Leftrightarrow MT = MT_1.$$

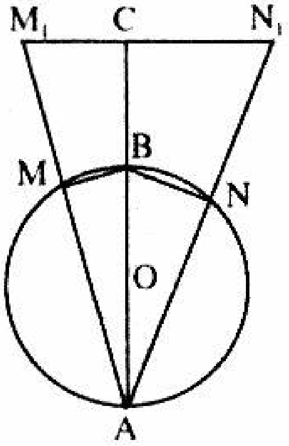
b. Ta có:

$$MC.MD = MA.MB = MC_1.MD_1$$

Vậy CDC_1D_1 nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 2: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Gọi (O) là đường tròn đường kính AB, d là đường thẳng qua C và vuông góc với BC. M, N là hai điểm tuỳ ý trên (O). AM và AN lần lượt cắt d tại M_1, N_1. Chứng minh rằng tứ giác MM_1N_1N nội tiếp một đường tròn.

Giải



- Tứ giác BMM_1C nội tiếp được bởi

$$\widehat{BMM_1} = \widehat{BCM_1} = 90^\circ,$$

suy ra: $\overline{AM}\,.\,\overline{AM_1} = \overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ (1)

- Tứ giác BNN_1C nội tiếp được bởi

$$\widehat{BNN_1} = \widehat{BCN_1} = 90^\circ,$$

suy ra: $\overline{AN}\,.\,\overline{AN_1} = \overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overline{AM}\,.\,\overline{AM_1} = \overline{AN}\,.\,\overline{AN_1}\,.$$

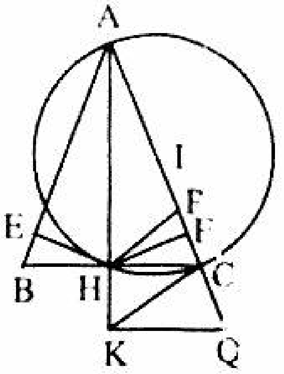
Vậy tứ giác MM_1N_1N nội tiếp một đường tròn.

Ví dụ 3: Cho ΔABC có đường cao AH (H ở trong đoạn BC). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC

a. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp được.

b. Gọi I là trung điểm AC, P là trung điểm IC, Q là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AC}$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn đường kính AC cắt AH kéo dài tại K. Chứng minh tứ giác PQKH nội tiếp được.

Giải



a. Từ ΔHAB vuông, ta có:

$AH^2 = AE.AB.$ (1)

Từ ΔAHC vuông, ta có:

$AH^2 = AF.AC.$ (2)

Từ (1), (2), suy ra:

$AE.AB = AF.AC \Leftrightarrow \overline{AE}.\overline{AB} = \overline{AF}.\overline{AC}.$

⇔ tứ giác BEFC nội tiếp.

b. Ta có:

$$\overline{AP}.\overline{AQ} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 = AC^2. \quad (3)$$

Từ ΔAKC vuông, ta có: $AC^2 = AH.AK = \overline{AH}.\overline{AK}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\overline{AH}.\overline{AK} = \overline{AP}.\overline{AQ}$ ⇔ tứ giác PQKH nội tiếp.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, M, N là hai điểm bất kì trên tiếp tuyến tại B của đường tròn. Giả sử AM, AN cắt đường tròn tại M_1, N_1. Chứng minh tứ giác MM_1N_1N nội tiếp.

Bài tập 2: Cho đường tròn (O, R) với đường kính AB cố định và một đường kính CD di động. Gọi (d) là tiếp tuyến tại B của (O); AC và AD lần lượt cắt (d) tại M và N.

a. Chứng minh rằng tứ giác MNDC nội tiếp được trong một đường tròn (O').

b. Đặt $\widehat{CAB} = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^0)$. Tính bán kính R' của (O') theo R và α. Xác định α để R' nhỏ nhất.

☐ $\alpha = 45^0$. ☐ $\alpha = 65^0$. ☐ Khác.

IV. HƯỚNG DẪN

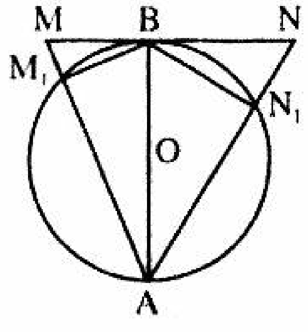
Bài tập 1:

- Trong ΔABM, ta có:

  $\overline{AM}.\overline{AM_1} = AB^2.$ (1)

- Trong ΔABM, ta có:

  $\overline{AN}.\overline{AN_1} = AB^2.$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra:

$\overline{AM}.\overline{AM_1} = \overline{AN}.\overline{AN_1}$.

Vậy tứ giác MM_1N_1N nội tiếp một đường tròn.

Bài tập 2: $\alpha = 45^0$.

BÀI TOÁN 4

ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tính tích vô hướng của hai vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta dùng tính chất sau:

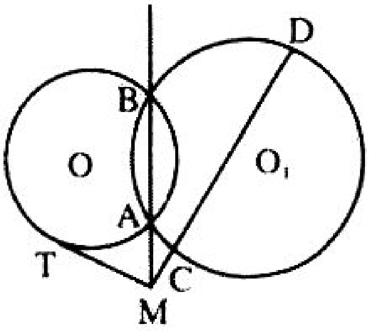
Gọi I là điểm thuộc đường thẳng BC. Điều kiện cần và đủ để IA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A là:

$$IA^2 = \overline{IB}\,.\,\overline{IC}\,.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho 2 đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại A và B. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường thẳng AB (ngoài đoạn AB). Kẻ tiếp tuyến MT với đường tròn (O). Chứng minh rằng MT tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔTCD tại T.

Giải



MT tiếp xúc với đường tròn (O) nên ta có:

$$MT^2 = \overline{MA}\,.\,MB \qquad (1)$$

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O_1) nên:

$$\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$MT^2 = \overline{MC}\,.\,\overline{MD}\,.$$

Vậy MT tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔTCD tại T.

Ví dụ 2: Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B, gọi I là trung điểm của một cung AB, hai dây IC, ID của (O) cắt AB lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

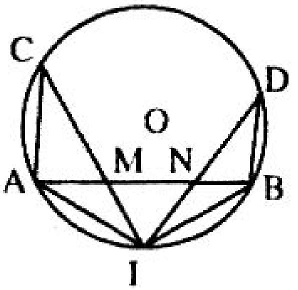
a. IA tiếp xúc với đường tròn (AMC), IB tiếp xúc với đường tròn (BND)

b. Tứ giác CMND nội tiếp đường tròn.

c. Hai đường tròn (AMC) và (BND) tiếp xúc với nhau tại A.

Giải

a. Nhận xét rằng ΔAMI và ΔCAI đồng dạng bởi:



$$\begin{cases} \hat{I} \text{ chung} \\ \widehat{MAI} = \widehat{ACI} \end{cases}$$

suy ra:

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IA} \Leftrightarrow IA^2 = IM.IC = \overline{IM}\,.\,\overline{IC}\,. \qquad (1)$$

Vậy IA tiếp xúc với đường tròn (AMC)

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$IB^2 = \overline{IN}\,.\,\overline{ID}\,. \qquad (2)$$

Vậy IB tiếp xúc với đường tròn BND.

b. Vì I là trung điểm của cung AB nên:

$$IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\overline{IM}\,.\,\overline{IC}=\overline{IN}\,.\,\overline{ID}\,.$$

Do đó tứ giác CMND nội tiếp.

c. Ttheo kết quả trên:

$$IA^2=\overline{IM}\,.\,\overline{IC}=\overline{IN}\,.\,\overline{ID}$$

Suy ra IA tiếp xúc với hai đường tròn (AMC) và (AND) có tiếp tuyến chung tại A nên chúng tiếp xúc với nhau tại A.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao. Trên đường tròn tâm C bán kính CA, lấy điểm M không ở trên đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường thẳng CM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM.

Bài tập 2: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) tâm O. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔAOM cắt đường thẳng BC tại một điểm thứ hai là E và cắt (O) tại D. AD cắt BC tại F. CMR:

a. $\overline{FB}\,.\,\overline{FC}=\overline{FE}\,.\,\overline{FM}$

b. $\overline{EB}\,.\,\overline{EC}=\overline{EF}\,.\,\overline{EM}$

c. EA tiếp xúc với các đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp ΔAMF.

Bài tập 3: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và đường tròn (γ) di động và tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại M và đoạn thẳng AB tại N, MA và MB lần lượt gặp (γ) tại C và D. Chứng minh rằng:

a. AB//CD và AN là phân giác của góc $\widehat{MAB}$ và MN đi qua một điểm cố định I.

b. IA tiếp xúc với đường tròn (AMN) tại A.

BÀI TOÁN 5

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng công thức tính phương tích của điểm đối với đường tròn ta thiết lập được mối quan hệ độ dài hoặc vectơ của các đối tượng trong hình, từ đó chứng minh được:

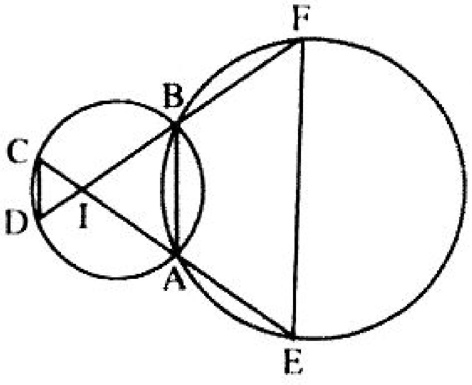
a. Mối quan hệ định tính, ví dụ như:
   - Tính song song, vuông góc.
   - Đường thẳng đi qua điểm cố định, đường tròn đi qua điểm cố định.
   - ...

b. Mối quan hệ định lượng, ví dụ như
   - Đoạn thẳng bằng nhau.
   - Tổng không đổi.
   - ...

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Các dây AC, BD của (O) cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O') tại các điểm tương ứng E, F. Chứng minh rằng CD//EF.

Giải



Ta có: $\mathcal{P}_{I/(O)} = \overline{IA}\,.\,\overline{IC} = \overline{ID}\,.\,\overline{IB}$

$\Leftrightarrow$ IA.IC = ID.IB. (1)

$\mathcal{P}_{I/(O')} = \overline{IA}\,.\,\overline{IE} = \overline{IB}\,.\,\overline{IF}$

$\Leftrightarrow$ IA.IE = IF.IB. (2)

Chia theo vế (1), (2), ta được:

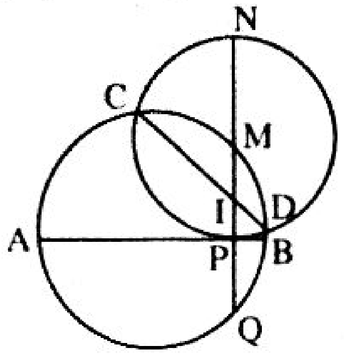
$$\frac{IC}{IE} = \frac{ID}{IF} \Leftrightarrow CD//EF.$$

Ví dụ 2: Gọi AB là một đường kính của đường tròn (O), M là một điểm trên (O). Đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại P, cắt (O) tại C và D, CD cắt mặt phẳng tại I. Chứng minh I là trung điểm đoạn MP.

Giải

Kéo dài MP gặp các đường tròn (O) và (M) lần lượt tại N và Q.

Ta có:



$\mathcal{P}_{I/(O)} = \overline{IM}\,.\,\overline{IQ} = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}$.

$\mathcal{P}_{I/(M)} = \overline{IN}\,.\,\overline{IP} = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}$.

Suy ra: $\overline{IM}\,.\,\overline{IQ} = \overline{IN}\,.\,\overline{IP}$

$\Leftrightarrow \overline{IM}\,(\,\overline{IP} + \overline{PQ}\,) = \overline{IP}\,(\,\overline{IM} + \overline{MN}\,)$

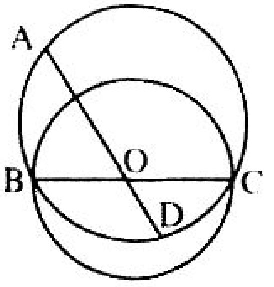
$\Leftrightarrow \overline{IM}\,.\,\overline{PQ} = \overline{IP}\,.\,\overline{MN}$

Mà PQ = PM = MN suy ra: IM = IP.

Vậy I là trung điểm đoạn MP.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O) và một điểm cố định A không ở trên (O), BC là một đường kính di động của (O). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đi qua một điểm cố định khác A.

Giải



Kéo dài AO cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D.

Ta có:

$$\mathscr{P}_{O/(ABC)} = \overline{OA}\,.\,\overline{OD} = \overline{OB}\,.\,\overline{OC} = -R^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{OD} = -\frac{R^2}{OA} \Rightarrow \text{điểm D cố định.}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔABC đi qua một điểm D cố định khác A.

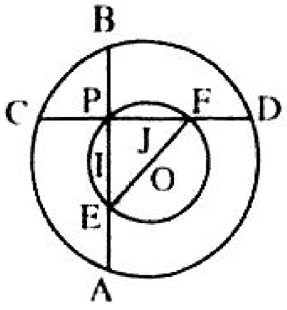
Chú ý: Kết quả trên cho phép chúng ta có thể kết luận được về quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC - Chúng ta sẽ còn gặp lại dạng toán này trong bài toán *tập hợp điểm*.

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn đồng tâm (O,R) và (O, r), với R > r. Một điểm P di động trên đường tròn nhỏ. Qua P kẻ hai dây cung AB và CD của đường tròn lớn và vuông góc với nhau. AB, CD theo thứ tự cắt đường tròn nhỏ tại E và F. CMR:

a. $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b. $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không đổi.

Giải



a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, ta có:

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = OB^2 + OA^2 - 2\,\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}$$
$$= 2R^2 - 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$$
$$= 2R^2 - 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IA})$$
$$= 2R^2 - 2OI^2 + 2IA^2 = 2R^2 - 2OI^2 + 2(OA^2 - OI^2)$$
$$= 4R^2 - 4OI^2. \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có: $CD^2 = 4R^2 - 4OJ^2$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4(OI^2 + OJ^2) = 8R^2 - 4OP^2 = 8R^2 - 4r^2.$$

b. Ta có: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PD}^2$

$$= (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})^2 + 2.\overrightarrow{PA}\,.\,\overrightarrow{PB} + (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD})^2 + 2\,\overrightarrow{PC}\,.\,\overrightarrow{PD}$$
$$= \overrightarrow{BA}^2 + 2.\mathscr{P}_{P/(O)} + \overrightarrow{DC}^2 + 2.\mathscr{P}_{P/(O)} = AB^2 + CD^2 + 4.\mathscr{P}_{P/(O)}$$
$$= 8R^2 - 4r^2 + 4(OP^2 - R^2) = 4R^2, \text{ dpcm.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn (O, R) và một đường thẳng Δ cố định không qua O. Gọi M là điểm di động trên Δ sao cho từ M ta vẽ được hai tiếp tuyến MP, MQ đến (O) (P, Q là hai tiếp điểm). Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 2: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và IA cắt (O) tại K, L là điểm đối tâm của K. CMR:

a. K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔIBC.

b. (***Hệ thức Euler***): IA.KC = 2Rr, từ đó suy ra $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Bài tập 3: Cho ΔABC nhọn có BC = a, CA = b, AB = c. Gọi (C) là đường tròn qua A tiếp xúc với các cạnh BC tại D và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

a. CMR $\sqrt{c.BM} + \sqrt{b.CN} = a$.

b. Giả sử tứ giác BCNM nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng:

$BM = c.\cos^2 B$,

$CN = b.\cos^2 C$.

Có nhận xét gì về điểm D khi đó.

c. Giả sử ΔABC đều có cạnh là 3a và BD = 2a. Tính bán kính đường tròn (C) theo a.

☐ $R = \dfrac{7a\sqrt{3}}{9}$. ☐ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho ΔABC có $BC = 2\sqrt{3}$, CA = 4, AB = 2. Gọi (I) là đường tròn sao cho:

$$\mathscr{P}_{A/(I)} + 12 = \mathscr{P}_{B/(I)} + 16 = \mathscr{P}_{C/(I)} + 4 = 0.$$

a. CMR tâm I của đường tròn (I) trùng với trực tâm của ΔABC.

b. Tính bán kính của đường tròn (I).

☐ $R_I = 4$. ☐ $R_I = 5$. ☐ Khác.

c. Tính $\mathscr{P}_{E/(I)}$, với E là trung điểm BC.

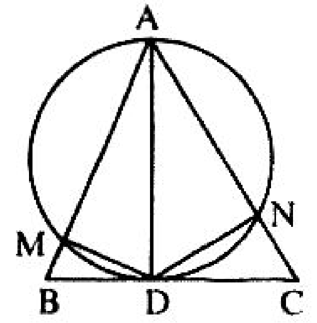
☐ $\mathscr{P}_{E/(I)} = -16$. ☐ $\mathscr{P}_{E/(I)} = 16$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thẳng hàng. Chứng minh rằng:

$$\mathscr{P}_{A/(O)}.\overline{BC} + \mathscr{P}_{B/(O)}.\overline{CA} + \mathscr{P}_{C/(O)}.\overline{AB} + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 3:



a. Ta có:

$\mathscr{P}_{B/(C)} = BD^2 = \overline{BM}.\overline{BA} \Leftrightarrow BD^2 = c.BM$

$\Leftrightarrow BD = \sqrt{c.BM}$. (1)

$\mathscr{P}_{C/(C)} = CD^2 = \overline{CN}.\overline{CA} \Leftrightarrow CD^2 = b.CN$

$\Leftrightarrow CD = \sqrt{b.CN}$. (2)

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$BD + CD = \sqrt{c.BM} + \sqrt{b.CN} \Leftrightarrow BC = \sqrt{c.BM} + \sqrt{b.CN} = a$, đpcm

b. Nhận xét rằng khi đó D là trung điểm BC.

c. $R = \dfrac{7a\sqrt{3}}{9}$.

Bài tập 4: $R_I = 4$, $\mathscr{P}_{E/(I)} = -16$.

BÀI TOÁN 6

TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Trục đẳng phương của hai đường tròn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

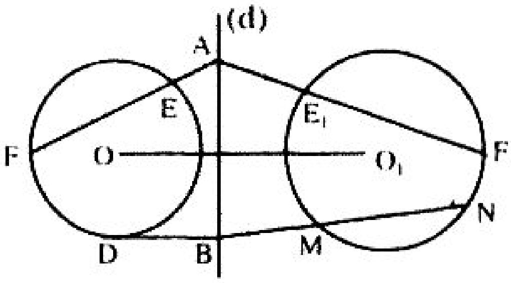
1. ***Trục đẳng phương của hai đường tròn*** được xác định bằng một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Hai đường tròn cố định*): Sử dụng kết quả của định lý:

"Cho hai đường tròn không đồng tâm (O, R) và (O', R'). Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đã cho là một đường thẳng (d) vuông góc với đường nối tâm OO' tại điểm H với

$$\overline{HI} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$$, I là trung điểm đoạn OO'."

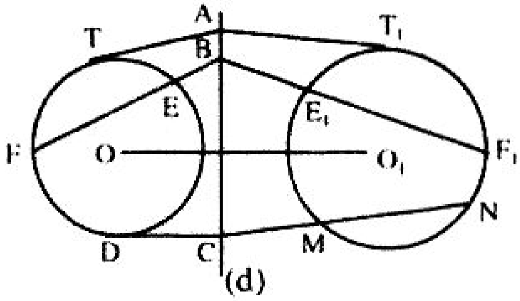
Cách 2: (*Một trong hai đường tròn thay đổi*): Ta xác định hai điểm phân biệt A, B thuộc (d), từ đó kết luận (AB) chính là trục đẳng phương cần tìm.



Lưu ý: Như vậy bằng việc xác định được trục đẳng phương của hai đường tròn ta có thể chứng minh được đặc tính của trục đẳng phương đó.

2. Sử dụng ***trục đẳng phương của hai đường tròn*** để giải một trong các dạng toán:

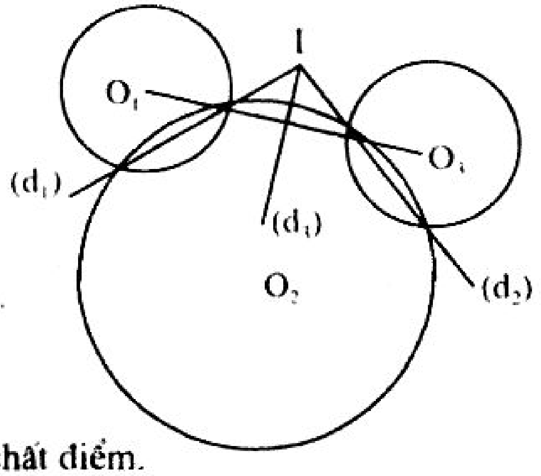
Dạng 1: Chứng minh ba điểm thẳng hàng: ta chứng minh ba điểm A, B, C cùng thuộc trục đẳng phương (d) của hai đường tròn.



Dạng 2: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ta có hai cách trình bày:

Cách 1: Chứng minh (d_1), (d_2), (d_3) theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2), (O_2) và (O_3), (O_3) và (O_1).

Cách 2: Giả sử $(d_1) \cap (d_2) = \{I\}$, ta chứng minh $I \in (d_3)$.



Dạng 3: Chứng minh tính chất điểm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O, R) và (O_1, R_1) không có điểm chung, gọi (d) là trục đẳng phương của chúng. Từ điểm E trên (d) kẻ các tiếp tuyến EP, EQ, EP_1, FQ_1 tới hai đường tròn.

a. Chứng minh rằng tứ giác PQP_1Q_1 nội tiếp trong đường tròn tâm E, ký hiệu là (E).

b. Chứng minh rằng khi E thay đổi đường tròn (E) luôn đi qua hai điểm cố định.

c. Điểm F trên (d) thực hiện như trên ta có được đường tròn (F). Chứng minh rằng OO_1 là trục đẳng phương của hai đường tròn (E), (F).

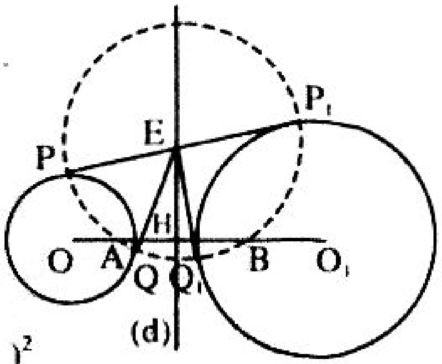
Giải

a. Từ tính chất của trục đẳng phương ta được:

$$EP^2 = EQ^2 = EP_1^2 = EQ_1^2$$

$\Leftrightarrow PQP_1Q_1$ nội tiếp trong đường tròn tâm E.

b. Gọi A, B là giao điểm của (E) với OO_1, ta sẽ chứng minh A, B là hai điểm cố định mà (E) luôn đi qua.



Gọi H là giao điểm của (d) với OO_1, ta có:

$$EA^2 = EP^2 = OE^2 - R^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \overrightarrow{OE}^2 - \overrightarrow{EA}^2 = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HE})^2 - (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HA})^2$$

$$= OH^2 - HA^2 + 2\overrightarrow{HE}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) = OH^2 - HA^2 + 2\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{OA} = OH^2 - HA$$

$\Leftrightarrow HA^2 = OH^2 - R^2$ **không đổi $\Rightarrow$ A cố định.**

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng B cố định.

Vậy A, B là hai điểm cố định mà (E) luôn đi qua.

c. Ta có:

$$\mathscr{P}_{O/(E)} = OE^2 - R_E^2 = OE^2 - (OE^2 - R^2) = R^2 = OF^2 - (OF^2 - R^2) = OF^2 - R_F^2 = \mathscr{P}_{O/(F)}$$

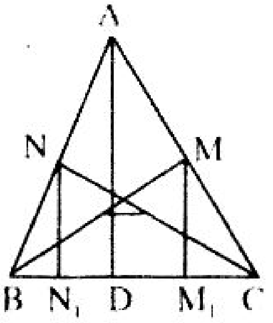
$\Leftrightarrow$ O thuộc trục đẳng phương của (E), (F).

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng O_1 thuộc trục đẳng phương của (E), (F).

Vậy OO_1 là trục đẳng phương của hai đường tròn (E), (F).

Ví dụ 2: Cho ΔABC có M, N lần lượt là giao điểm của hai đường trung tuyến với các cạnh AC và AB. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BM và CN là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

Giải



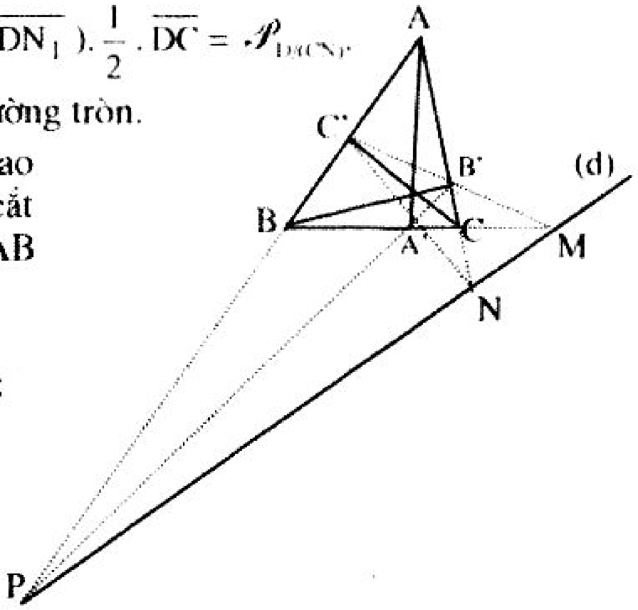
Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của BM, CN. Khi đó I, J theo thứ tự là tâm của hai đường tròn (BM), (CN). Gọi AD là đường cao kẻ từ A, ta có ngay AD⊥IJ (bởi IJ//CD). Do đó để thực hiện yêu cầu của bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$\mathscr{P}_{D/(BM)} = \mathscr{P}_{D/(CN)}$$

Gọi M_1, N_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, N lên BC, ta có:

$$\mathscr{P}_{D/(BM)} = \overline{DB}\,.\,\overline{DM_1} = (2\,\overline{DN_1}\ ).\,\frac{1}{2}\,.\,\overline{DC} = \overline{DN_1}\ ).\,\frac{1}{2}\,.\,\overline{DC} = \mathscr{P}_{D/(CN)}$$

Vậy AD là trục đẳng phương của hai đường tròn.



Ví dụ 3: Cho ΔABC, vẽ các đường cao AA', BB', CC' của tam giác. Giả sử B'C' cắt BC tại M, C'A' cắt CA tại N, A'B' cắt AB tại P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Giải

Tứ giác BCB'C' nội tiếp đường tròn nên:

$$\overline{MB}\,.\,\overline{MC} = \overline{MB'}\,.\,\overline{MC'}$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_{M/(ABC)} = \mathscr{P}_{M/(A'B'C')}$$

⇔ M ở trên trục đẳng phương (d) của (ABC) và (A'B'C').

Chứng minh tương tự ta được N, P cũng ở trên (d).

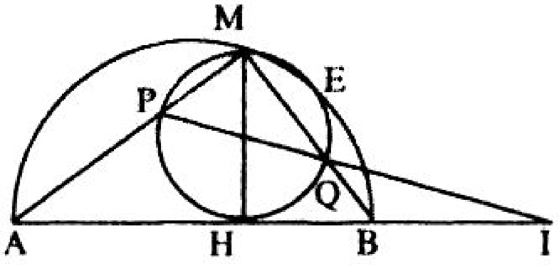
Vậy M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB với điểm M ở trên nửa đường tròn đó. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Đường tròn đường kính MH cắt MA tại P, cắt MB tại Q và cắt cung AB tại điểm thứ hai E. Chứng minh các đường thẳng AB, PQ, ME đồng quy.

Giải

Ta có ME là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (MH).

Các góc $\widehat{MPH}$ và $\widehat{MQH}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{MPH} = \widehat{MQH} = 1v$



Xét các tam giác vuông ΔMAH và ΔMBH, ta có:

$$MH^2 = \overline{MP}\,.\,\overline{MA} = \overline{MQ}\,.\,\overline{MB}.$$

Suy ra tứ giác APQB nội tiếp đường tròn.

Gọi I là giao điểm của ME và PQ, ta được:

$$\overline{IA}\,.\,\overline{IB} = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ} \Leftrightarrow \mathscr{P}_{I/(O)} = \mathscr{P}_{I/(MH)}.$$

⇒ I nằm trên trục đẳng phương của (O) và (MH) là ME.

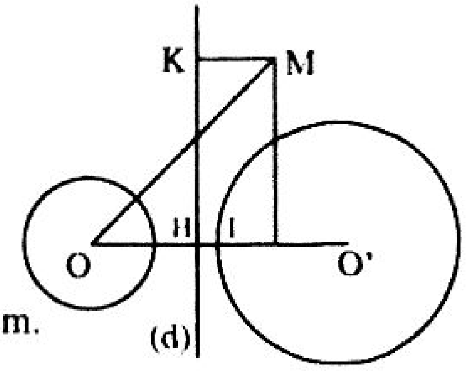
Vậy AB, PQ, ME đồng quy.

Ví dụ 5: Gọi (d) là trục đẳng phương của hai đường tròn không đồng tâm (O) và (O'). M là một điểm bất kỳ, kẻ MK vuông góc với (d) tại K. Trên KM và OO' định cùng chiều dương. Chứng minh rằng:

$$\mathcal{P}_{M/(O)} - \mathcal{P}_{M/(O')} = 2\overline{OO'}.\overline{KM}.$$

Giải

Gọi H là giao điểm của (d) và OO'; I là trung điểm của OO'; R và R' lần lượt là bán kính của (O) và (O').



Ta có: $R^2 - R'^2 = 2\overline{OO'}.\overline{IH}$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{M/(O)} - \mathcal{P}_{M/(O')} &= (MO^2 - MO'^2) - (R^2 - R'^2)\\ &= 2\overline{OO'}\,\overline{IP} - 2\overline{OO'}.\overline{IH}\\ &= 2\overline{OO'}(\overline{IP} - \overline{IH})\\ &= 2\overline{OO'}.\overline{HP} = 2\overline{OO'}.\overline{KM}\text{, dpcm.}\end{aligned}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai đường tròn (O), (O_1) cố định và điểm I trên (O), gọi It là tiếp tuyến của (O), MN là dây cung thay đổi của (O_1) và luôn song song với It, gọi A, A_1 là giao điểm của IM với (O), B, B_1 là giao điểm của IN với (O), (O_1).

a. CMR đường thẳng A_1B_1 luôn đi qua một điểm cố định.

b. Tìm quỹ tích giao điểm của MN và AB.

Bài tập 2: Cho đường tròn tâm O và điểm A ở trong đường tròn, M là một điểm di động trên đường tròn. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn (AOM) với tiếp tuyến tại M của đường tròn (O).

a. Tìm quỹ tích điểm P.

b. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và đường tròn (AOM) luôn đI qua một điểm cố định.

Bài tập 3: Cho ΔABC và một đường thẳng (d) cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F nằm ngoài tam giác.

a. Chứng minh rằng trực tâm của 4 tam giác ΔABC, ΔAEF, ΔDBF và ΔDEC nằm trên đường thẳng gọi là (Δ).

b. Chứng minh trung điểm của ba đoạn AD, EF, CF nằm trên đường thẳng (Δ') vuông góc với (Δ).

Bài tập 4: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định, M là một điểm di động trên (O). Vẽ đường tròn tâm I qua A. Chứng minh trục đẳng phương của (O) và (I) tiếp xúc với một đường tròn cố định.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1:

a. A_1B_1 luôn đi qua điểm cố định E là giao điểm của It với trục đẳng phương (d) của (O) và (O_1).

b. Quỹ tích giao điểm F của MN và AB chính là trục đẳng phương (d).

Bài tập 2:

a. Quỹ tích điểm P là đường thẳng vuông góc với OA.

b. Trục đẳng phương của (O) và đường tròn (AOM) qua một điểm cố định K trên OA.

Bài tập 4: Trục đẳng phương của (O) và (I) tiếp xúc với một đường tròn cố định tâm A.

BÀI TOÁN 7

TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tập hợp điểm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

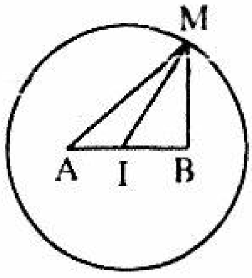
Dựa trên tính chất phương tích của điểm đối với đường tròn ta xác định được tính chất của điểm đó, từ đó kết luận cho quỹ tích cần tìm.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho AB = 4 và hai đường tròn (A, 2) và (B, 3). Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$\mathscr{P}_{M/(A)} + \mathscr{P}_{M/(B)} = 27. \qquad (1)$$

Giải



Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(A)} = MA^2 - R_A^2 = MA^2-4. \qquad (2)$$

$$\mathscr{P}_{M/(B)} = MB^2 - R_B^2 = MB^2 - 9. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$MA^2 + MB^2 - 13 = 27 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 40. \qquad (4)$$

Gọi I là trung điểm AB, ta biến đổi (4) về dạng:

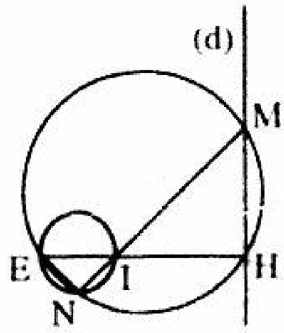
$$2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 40 \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4.$$

Vậy tập hợp điểm M thuộc (I, 4).

Ví dụ 2: Cho đường thẳng (d) và một điểm I không thuộc (d). Gọi M là một điểm di động trên (d). Tìm quỹ tích các điểm N sao cho

$$\overline{IM}\,.\,\overline{IN} = k, \text{ k là hằng số khác 0.}$$

Giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d), khi đó lấy trên đường thẳng IH điểm E sao cho:

$$\overline{IH}\,.\,\overline{IE} = k \Rightarrow \text{E cố định.}$$

Khi đó kết hợp với điều kiện giả thiết, ta được:

$$\overline{IH}\,.\,\overline{IE} = \overline{IM}\,.\,\overline{IN}$$

$\Leftrightarrow$ tứ giác MHNE nội tiếp

Suy ra hai tam giác ΔIHM và ΔINE đồng dạng $\Rightarrow$ N nhìn EI dưới một góc vuông.

Vậy tập hợp điểm N thuộc đường tròn đường kính EI.

Ví dụ 3: Cho điểm P ở ngoài đường tròn (O, R), đường thẳng (d) thay đổi qua P cắt (O) tại hai điểm A, B. Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại M. Kẻ MH vuông góc với OP.

a. CMR O, A, B, M, H nội tiếp một đường tròn.

b. CMR H là điểm cố định khi (d) thay đổi, từ đó suy ra quỹ tích của điểm M.

Giải

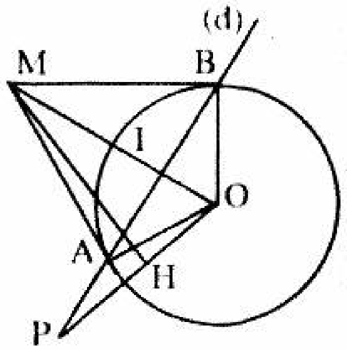
a. Nhận xét rằng A, B, H cùng nhìn OM dưới một góc vuông, do đó O, A, B, M, H nội tiếp một đường tròn đường kính OM, ký hiệu là (I), với I là trung điểm OM.

b. Ta có:

$$\mathscr{P}_{P/(I)} = \overline{PH}\,.\,\overline{PO} = \overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \mathscr{P}_{P/(O)} = PO^2 - R^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{PH} = \frac{PO^2 - R^2}{\overline{PO}} \Rightarrow \text{H cố định.}$$

Vậy suy ra M ở trên đường thẳng (d_1) vuông góc với OP tại H với $\overline{PH} = \dfrac{PO^2 - R^2}{\overline{PO}}$.



Ví dụ 4: Cho điểm P ở trong một đường tròn tâm O bán kính R, Q là điểm tuỳ ý trên đường tròn (O,R). Đường thẳng qua O vuông góc với PQ cắt tiếp tuyến của (O) tại Q ở M. Tìm quỹ tích các điểm M khi Q di động trên (O).

Giải

Gọi I là giao điểm của OM và PQ, H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng OP.

Tứ giác MIPH có $\hat{I} = \hat{H} = 90^0$ nên nội tiếp đường tròn, suy ra:

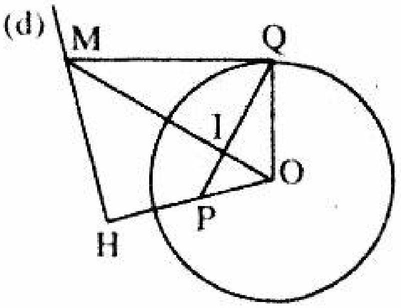
$$\overline{OP}\,.\,\overline{OH} = \overline{OI}\,.\,\overline{OM} \qquad (1)$$

Trong ΔOQM, ta có:

$$R^2 = OQ^2 = \overline{OI}\,.\,\overline{OM} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overline{OP}\,.\,\overline{OH} = R^2 \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{R^2}{\overline{OP}} \Rightarrow \text{H cố định.}$$



Vậy suy ra M ở trên đường thẳng (d) vuông góc với OP tại H với $\overline{OH} = \dfrac{R^2}{\overline{OP}}$.

Ví dụ 5: Cho đường tròn (O) và một điểm cố định A không ở trên (O), BC là một đường kính di động của (O). Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

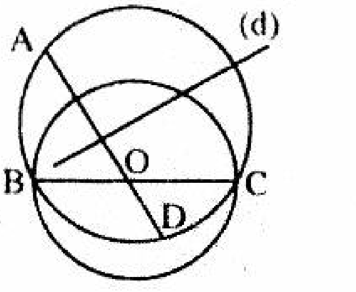
Giải

Kéo dài AO cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D.

Ta có:

$$\mathscr{P}_{O/(ABC)} = \overline{OA}\,.\,\overline{OD} = \overline{OB}\,.\,\overline{OC} = -R^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{OD} = -\frac{R^2}{\overline{OA}} \Rightarrow \text{điểm D cố định.}$$



Khi đó đường tròn ngoại tiếp ΔABC luôn đi qua hai điểm cố định A, P.

Vậy tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC chạy trên đường trung trực của đoạn AD.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho AB = 6 và hai đường tròn (A, 3) và (B, 4). Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$\mathscr{P}_{M/(A)} + \mathscr{P}_{M/(B)} = 10.$$

Bài tập 2: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). Một đường tròn di động qua A và trung điểm M của BC tại E và cắt (O) tại F. Gọi F' là giao điểm của AF và BC.

a. Chứng minh rằng:

$$\overline{F'M}.\overline{F'E} = \overline{F'B}.\overline{F'C},$$

$$MB^2 = MC^2 = \overline{ME}.\overline{MF'}.$$

b. Gọi K là giao điểm trên đường thẳng AF thoả mãn:

$$\overline{AF}.\overline{AK} = R^2.$$

Chứng minh rằng K ở trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O, R) và điểm P với OP = 2R; MN là một đường kính của (O).

a. Tìm quỹ tích tâm đường tròn (PMN).

b. Dựng ΔPMN với $\widehat{MPN} = 45^0$.

c. Đặt $\widehat{MPN} = \alpha$. Chứng minh rằng:

$$\cos\alpha = \frac{3R^2}{PM.PN}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của cosα.

Bài tập 4: Cho đường tròn (O, R) di động luôn tiếp xúc với đoạn AB = R cố định tại trung điểm I của nó. Tìm quỹ tích các điểm M thoả mãn:

$2MT^2 = MA^2 + MB^2$, với MT là tiếp tuyến của (O) tiếp điểm T.

Bài tập 5: Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D cố định và theo thứ tự đó cùng ở trên một đường thẳng Δ. Hai đường tròn di động qua A, B và C, D cắt nhau tại M, N.

a. Chứng minh đường thẳng MN qua một điểm cố định K.

b. Chứng minh các tiếp điểm của các tiếp tuyến với hai đường tròn trên vẽ từ K thuộc một đường tròn cố định.

Bài tập 6: Cho đường tròn tâm O và một điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại M và N, hai đường tròn đường kính AM và AN lần lượt cắt (O) tại M' và N'. Tìm quỹ tích giao điểm I của MM' và NN'.

Bài tập 7: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R'). Đặt OO' = d. Một tiếp tuyến di động của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại A và B. Gọi I là tâm đường tron (O'AB).

a. Tính OI theo R, R', d.

b. Tìm quỹ tích điểm I khi tiếp tuyến di động.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 4: M thuộc đường thẳng qua H và vuông góc với AB, với H được xác định bởi:

$$\overline{IH} = \frac{3R}{4}.$$

Bài tập 5: Bạn đọc tự vẽ hình.

a. Gọi K là giao điểm của MN và Δ. Ta có:

$$\mathscr{P}_{K/(O)} = \overline{KA}\,.\,\overline{KB},$$

$$\mathscr{P}_{K/(O')} = \overline{KC}\,.\,\overline{KD},$$

suy ra:

$$\overline{KA}\,.\,\overline{KB} = \overline{KC}\,.\,\overline{KD}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{KB} + \overline{BA})\overline{KB} = (\overline{KB} + \overline{BC})(\overline{KB} + \overline{BD})$$

$$\Leftrightarrow \overline{KB}(\overline{BA} - \overline{BC} - \overline{BD}) = \overline{BC}\,.\,\overline{BD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{KB} = \frac{\overline{BC}.\overline{BD}}{\overline{DA} - \overline{BC}} = \text{hằng số.}$$

K ở trên đường thẳng Δ cố định và $\overline{KB}$ là hằng số nên K cố định.

b. Thực hiện tương tự như a) ta có:

$$\overline{KC} = \frac{\overline{CA}.\overline{CB}}{\overline{BC} - \overline{DA}} = -\frac{\overline{CA}.\overline{CB}}{\overline{BC}.\overline{BD}}\overline{KB}.$$

Vì $-\frac{\overline{CA}.\overline{CB}}{\overline{BC}.\overline{BD}} < 0$ nên K ở trong đoạn BC, suy ra K ở ngoài các đường tròn (O) và (O'). Do đó tồn tại các tiếp tuyến vẽ từ K đến hai đường tròn này.

Gọi các tiếp điểm là E, E', F, F'.

Ta có:

$$KE^2 = KF^2 = KE'^2 = KF'^2 = \overline{KA}\,.\,\overline{KB}$$

Từ đó suy ra E, E', F, F' thuộc đường tròn cố định tâm K bán kính $R = \sqrt{\overline{KA}.\overline{KB}}$.

Bài tập 6: Đường thẳng vuông góc với OA.

Bài tập 7: Quỹ tích điểm I thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R_1 = \frac{|d^2 - R^2|}{2R'}$.

CHƯƠNG III

PHÉP BIẾN HÌNH

MỞ ĐẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

1.1. Định nghĩa

Gọi S là tập hợp các điểm trong mặt phẳng.

- Phép biến hình là một ánh xạ từ S vào S.
- Phép biến hình biến điểm M thành M_1 thường được ký hiệu như sau:

$$f: M \mapsto M_1 \text{ hay } M \overset{f}{\mapsto} M_1.$$

Khi đó:

- M_1 gọi là ảnh của điểm M, ký hiệu $M_1 = f(M)$
- M gọi là tạo ảnh của M_1.
- M_0 là điểm bất biến (điểm kép) trong phép biến hình f khi $f(M_0) = M_0$.
- Tập hợp tất cả các ảnh của các điểm của một hình $\mathscr{H}$ tạo thành một hình $\mathscr{H}_1$ gọi là ảnh của $\mathscr{H}$ qua f, ký hiệu $\mathscr{H}_1 = f(\mathscr{H})$
- Phép biến hình f cho tương ứng mỗi điểm $M \in S$ với chính nó gọi là phép biến hình đồng nhất, tức là:

$$\forall M \in S: f(M) = M.$$

1.2. Tích của hai phép biến hình

Cho hai phép biến hình trong S theo sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[dr, "g"] & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g_o f"'] & & M_2 \end{tikzcd}$$

Phép biến hình biến M thành M_2 được gọi là tích của hai phép biến hình f và g theo thứ tự đó, ký hiệu là $g_o f$, ta có:

$$\forall M \in S, (g_o f)(M) = g(f(M)).$$

2. PHÉP DỜI HÌNH

2.1. Định nghĩa

Phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ gọi là phép dời hình (hay phép đẳng cự).

Gọi T là phép dời hình của tập S thì ta có:

$$\forall A, B \in S, d(A, B) = d(T(A), T(B))$$

2.2. Định lý

Phép dời hình biến:

- Đường thẳng thành đường thẳng.

- Tia thành tia.
- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Đường tròn thành đường tròn bằng nó.

2.3. Định lý

Phép dời hình bảo toàn độ lớn của góc.

3. CÁC PHÉP DỜI HÌNH ĐẶC BIỆT

Trong mục này ta chỉ liệt kê các phép dời hình đặc biệt còn định nghĩa cùng với các tính chất của mỗi phép biến hình đặc biệt sẽ được trình bày chi tiết trong mỗi chủ đề.

1. Phép đối xứng tâm
2. Phép đối xứng trục
3. Phép tịnh tiến

4. CÁC HÌNH TỰ ĐỐI XỨNG

Định nghĩa: Nếu qua một phép đối xứng, một hình $\mathscr{H}$ trùng với ảnh $\mathscr{H}$ của nó thì hình đó có tâm đối xứng, có trục đối xứng tuỳ theo phép đối xứng đang xét là phép đối xứng tâm, đối xứng trục. Các hình như thế gọi là các hình tự đối xứng.

Tâm, trục đối xứng của phép đối xứng đó gọi là *tâm đối xứng, trục đối xứng* của hình $\mathscr{H}$ đã cho.

5. PHÉP VỊ TỰ

Định nghĩa: Cho trước điểm O và số thực $k \neq 0$. Phép vị tự tâm O, tỷ số k, ký hiệu H_O^k, là phép biến hình được xác định như sau:

$$M_1 = H_O^k(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}.$$

Ghi chú:

- Ba điểm O, M, M_1 thẳng hàng và O là điểm kép duy nhất.
- Nếu $k > 0$ thì ta có phép vị tự thuận.
- Nếu $k < 0$ thì ta có phép vị tự nghịch.

Định lý: Phép vị tự:

- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng cùng phương với nó.
- Biến một tia thành một tia: cùng chiều nếu $k > 0$ và ngược chiều nếu $k < 0$.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng.
- Biến đường tròn (O_1, R_1) thành đường tròn (O_2, R_2) với:

$$\overrightarrow{OO_2} = k\overrightarrow{OO_1} \text{ và } R_2 = |k|R_1.$$

- Bảo toàn tỷ số khoảng cách giữa các điểm.
- Bảo toàn độ lớn của góc giữa hai đường thẳng.

6. PHÉP ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: Cho trước số thực $k > 0$. Phép đồng dạng tỷ số k, là phép biến hình biến hai điểm A, B thành hai điểm A_1, B_1 sao cho: $A_1B_1 = kAB$.

Định lý: Phép đồng dạng biến:

- Đường thẳng thành một đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành một đoạn thẳng trong đó thứ tự các điểm được bảo toàn.
- Bảo toàn độ lớn của góc giữa hai đường thẳng.

II. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Phương pháp biến hình thường được sử dụng để giải ba dạng toán cơ bản:

Dạng 1: Chứng minh tính chất hình học.

Dạng 2: Tìm tập hợp điểm.

Dạng 3: Dựng hình.

Ngoài ra trong những trường hợp riêng biệt chúng còn được sử dụng để giải các dạng toán:

- Tính toán các yếu tố định lượng của hình.
- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.
- Hệ toạ độ đối với phép biến hình.

Tuy nhiên trong phần mở đầu này để bạn đọc tiện theo dõi, xin được miêu tả phương pháp giải cho ba dạng toán cơ bản được trình bày trong bài toán 1, bài toán 2, bài toán 3 như sau:

Bài toán 1: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện một phép biến hình thích hợp.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép biến hình này để giải quyết các yêu cầu của bài toán.

Bài toán 2: Tìm tập hợp điểm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép biến hình f, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép biến hình f.

Bài toán 3: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tích.

Bước 2: Cách dựng.

Bước 3: Chứng minh.

Bước 4: Biện luận.

Chú ý: **Để dựng một điểm, ta xem điểm đó là điểm chung của hai tập hợp điểm. Dựng hai tập hợp điểm này ta được điểm cần dựng.**

CHỦ ĐỀ 1

PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O. Phép đối xứng tâm O, kí hiệu S_O là phép biến hình trên $\mathcal{P}$ biến điểm M thành M_1 sao cho: $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM_1}$ (O là trung điểm đoạn MM_1).

Vậy:

$$M_1 = S_O(M) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM_1}$$

Chú ý: Ta luôn có:

- $M_1 = S_O(M) \Rightarrow M = S_O(M_1)$.
- $S_O(O) = O$.

2. TÍNH CHẤT

Phép đối xứng tâm là một phép dời hình.

Hệ quả: Phép đối xứng tâm bảo toàn:

- Khoảng cách giữa hai điểm.
- Tính thẳng hàng của các điểm, hơn nữa nếu điểm B ở giữa hai điểm A, C thì điểm $B_1 = S_O(B)$ cũng nằm giữa hai điểm $A_1 = S_O(A)$ và $C_1 = S_O(C)$.
- Số đo của một góc

3. ẢNH CỦA MỘT SỐ HÌNH QUA PHÉP ĐỐI XỨNG S_O

- Ảnh của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng $A_1B_1 = AB$
- Ảnh của véctơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB}$
- Ảnh của một đường thẳng (d) là (d_1) cùng phương với (d).
- Ảnh của một đường tròn là một đường tròn bằng nó.

BÀI TOÁN 1

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh (H_1) là ảnh của (H_2) qua phép đối xứng tâm O, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tùy ý thuộc (H_1), ta đi chứng minh $M_2 = S_O(M_1) \in (H_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tùy ý thuộc (H_2), ta đi chứng minh $M_1 = S_O(M_2) \in (H_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép đối xứng tâm để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép đối xứng tâm để giải các yêu cầu bài toán.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Cho ΔABC có AM, CN là các trung tuyến. Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$ thì ΔABC đều.

Giải

Tứ giác ACMN có $\widehat{NAM} = \widehat{MCN} = 30^0$ nên nội tiếp trong một đường tròn tâm O bán kính R và $\widehat{MON} = 2\,\widehat{NAM} = 60^0$.

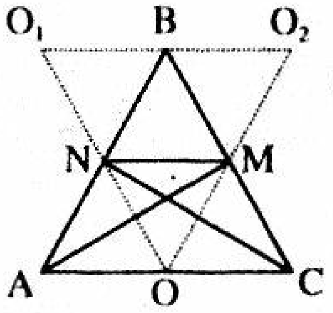
Xét các phép đối xứng tâm N và tâm M.

$S_{(N)}: A \mapsto B$ và $(O) \mapsto (O_1)$

$\Rightarrow B \in (O_1)$ vì $A \in (O)$.

$S_{(M)}: C \mapsto B$ và $(O) \mapsto (O_2)$

$\Rightarrow B \in (O_2)$ vì $C \in (O)$



Trong ΔOO_1O_2, ta có nhận xét:

$OO_1 = OO_2 = 2R$,

$\widehat{MON} = 2\,\widehat{BAM} = 60^0$,

suy ra ΔOO_1O_2 là tam giác đều.

Mặt khác:

$O_1B + O_2B = R + R = 2R = O_1O_2$ nên B là trung điểm của O_1O_2.

Từ đó suy ra hai ΔABC và ΔOO_1O_2 đồng dạng (vì cùng đồng dạng với ΔBMN) và vì ΔOO_1O_2 đều nên ΔABC đều.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) với ba dây AB, MN, PQ cắt nhau tại I sao cho IA = IB và M, P nằm cùng phía với AB. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB với PN. Chứng minh rằng IE = IF.

Bài tập 2: Cho ΔABC có H là trực tâm; M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi H_1, H_2, H_3 là điểm đối xứng của H qua M, N, P theo thứ tự đó. Chứng minh H_1, H_2, H_3 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài tập 3: Cho ΔABC, đường tròn (O) cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1 và A_2; B_1 và B_2; C_1 và C_2. Chứng minh rằng: nếu đường thẳng vuông góc với các cạnh của tam giác tại A_1, B_1, C_1 đồng quy thì các đường thẳng vuông góc với các cạnh của tam giác tại A_2, B_2, C_2 đồng quy.

Bài tập 4: Cho tam giác ABC. Vẽ các tia Ax, Ay trong góc A sao cho $B\hat{A}x = C\hat{A}y$, vẽ các tia Bz, Bt trong góc B sao cho $A\hat{B}z = C\hat{B}t$. Gọi E là giao điểm của Ax và Bz, F là giao điểm Ay và Bt. Chứng minh rằng $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: *Đề nghị bạn đọc tự vẽ hình.*

Lấy M', Q' lần lượt đối xứng với M, Q qua I.

Ta có Q'M' đối xứng với MQ qua I.

Do A, B đối xứng nhau qua I nên Q'M' cắt BI tại F' đối xứng với E qua I.

Suy ra:

IF' = IE.

Mặt khác A, B đối xứng nhau qua I nên A, B, M', Q' theo thứ tự đối xứng với B, A, M,Q qua I.

Mà B, A, M, Q ở trên đường tròn (O) nên A, B, M', Q' ở trên đường tròn (O') đối xứng với (O) qua I.

Lại có:

$$\overline{IM}\,.\,\overline{IN} = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ},$$

$$\overline{IM'} = -\overline{IM},$$

$$\overline{IQ'} = -\overline{IQ},$$

$\Rightarrow \overline{IM'}\,.\,\overline{IN} = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ'} \Rightarrow$ 4 điểm M', N, Q', P thuộc một đường tròn (K)

Vì :

- AB là trục đẳng phương của (O) và (O'),
- PN là trục đẳng phương của (O) và (K),
- Q'M' cắt AB tại F' nên PN đi qua F.

Lại có PN cắt AB tại F nên F ≡ F' ⇒ IF = IE, đpcm.

BÀI TOÁN 2

TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép đối xứng tâm S_O, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép đối xứng tâm S_O.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn (O_1), (O_2) qua M, theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của (O_1), (O_2).

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định.

b. Tìm tập hợp N khi M di động trên (O).

Giải

a. Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

$$IA^2 = \overline{IM}\,.\,\overline{IN} = IB^2 \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ IA = IB, do đó I là trung điểm AB.

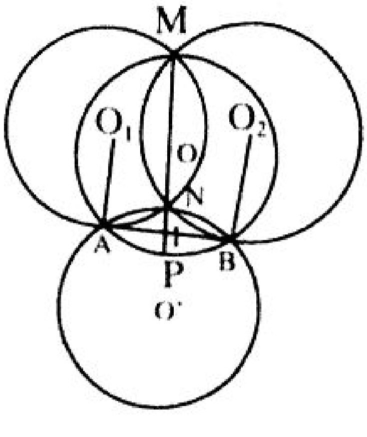
Vậy đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định I là trung điểm AB.

b. Gọi P là điểm chung thứ hai của MN và (O), ta có:

$$\overline{IP}\,.\,\overline{IM} = \overline{IA}\,.\,\overline{IB} = -IA^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overline{IP}\,.\,\overline{IM} = -\,\overline{IM}\,.\,\overline{IN} \Rightarrow \overline{IP} = -\,\overline{IN} \;\Rightarrow N = S_{(I)}(P)$$



Vì tập hợp các điểm P là đường tròn (O) qua hai điểm A và B nên tập hợp các điểm N là đường tròn (O') bỏ đi hai điểm A và B với (O') = $S_{(I)}$(O).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) dựng hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là tiếp điểm). Tại một điểm M tuỳ ý của (O) dựng tiếp tuyến thứ ba, cắt AB và AC lần lượt tại D, E. Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDOE khi M di động trên (O).

BÀI TOÁN 3

DỰNG HÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta luôn thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tích.

Bước 2: Cách dựng.

Bước 3: Chứng minh.

Bước 4: Biện luận.

Chú ý: Để dựng một điểm, ta xem điểm đó là điểm chung của hai tập hợp điểm. Dựng hai tập hợp điểm này ta được điểm cần dựng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

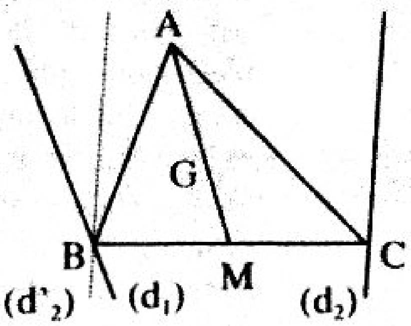
Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), hai điểm A, G không thuộc (d_1), (d_2). Hãy dựng ΔABC có trọng tâm G và hai đỉnh B và C lần lượt thuộc (d_1) và (d_2).

Giải

- Phân tích

Giả sử đã dựng được ΔABC có trọng tâm G, hai đỉnh B và C lần lượt thuộc (d_1), (d_2). Gọi M là trung điểm cạnh BC thì M được xác định bởi:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$$



Thực hiện phép đối xứng tâm M:

$S_{(M)}$: $C \mapsto B$, $(d_2) \mapsto (d'_2)$.

Ta có $B \in (d'_2)$.

Vậy B là giao điểm của (d'_2) và (d_1).

- Cách dựng:

- Dựng $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.
- Dựng đường thẳng (d'_2) với $(d'_2) = S_{(M)}[(d_2)]$
- (d'_2) cắt (d_1) tại B
- Dựng điểm C với $C = S_{(M)}(B)$

thì ΔABC là tam giác cần dựng.

- Chứng minh

Dựa vào cách dựng ta có:

- $B \in (d_1)$;

- $B \in (d'_2)$;
- $S_{(M)}[(d'_2)] = (d'_2)$ và $C = S_{(M)}(B) \Rightarrow C \in (d_2)$
- M là trung điểm cạnh BC và $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow$ G là trọng tâm ΔABC.

- Biện luận

Số nghiệm hình của bài toán bằng số điểm chung của (d_1) và (d'_2).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. Ba trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại G.

a. Dựng ảnh $A_2B_2C_2$ của ΔABC qua $Đ_G$.

b. Chứng minh hai tam giác ΔABC và $\Delta A_2B_2C_2$ đồng dạng. Xác định tỉ số đồng dạng.

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD với giao điểm O của hai đường chéo. Xác định ảnh của hình bình hành này qua phép đối xứng tâm O.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O), đường thẳng (d) và điểm A không phụ thuộc đường thẳng (d) và đường tròn (O). Dựng điểm B thuộc đường tròn (O) và điểm C thuộc (d) sao cho A là trung điểm BC.

Bài tập 4: Cho tứ giác ABCD và điểm O nằm trong tứ giác. Hãy dựng hình bình hành có tâm là O và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh kéo dài của tứ giác.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và một điểm I. Hãy tìm trên mỗi đường hai điểm sao cho bốn điểm phải tìm là bốn đỉnh của một hình bình hành có tâm là I.

Bài tập 6: Cho hình vuông ABCD và một điểm K nằm bên trong không trùng với tâm của hình vuông. Dựng qua K một đường thẳng sao cho nó cắt hình vuông thành hai phần có hiệu diện tích lớn nhất.

Bài tập 7: Cho ΔABC. Dựng đường thẳng (d) qua A sao cho với mọi điểm M thuộc (d), ta luôn có chu vi ΔMBC lớn hơn hoặc bằng chu vi ΔABC.

Bài tập 8: Cho góc nhọn xOy và hai điểm A, B ở trong góc đó. Hãy dựng các điểm C và D lần lượt trên Ox, Oy sao cho đường gấp khúc ABCD có độ dài lớn nhất.

BÀI TOÁN 4

HỆ TOẠ ĐỘ ĐỐI VỚI PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong phần này có một vài kiến thức mở rộng hơn so với kiến thức Toán 10, do vậy để tiện theo dõi các em học sinh cần biết:

1. Phương trình đường thẳng, lập phương trình đường thẳng song song.
2. Phương trình đường tròn.

Tuy nhiên các tác giả đã cố gắng trình bày cho thật dễ hiểu đối với các em học sinh lớp 10. Trong phần này chúng ta xét ba bài toán cơ bản và mong muốn thông qua đó các em có thể xây dựng được phương pháp giải bài toán tổng quát.

Bài toán 1: Xác định điểm M_1 đối xứng với điểm M qua điểm I(a, b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có ngay I là trung điểm MM_1, do đó:

$$\begin{cases} x_M + x_{M_1} = 2a \\ y_M + y_{M_1} = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_1} = 2a - x_M \\ y_{M_1} = 2b - y_M \end{cases}.$$

Đặc biệt: Nếu $I \equiv O(0, 0)$ thì với M(x, y) suy ra $M_1(x_1, y_1)$.

Bài toán 2: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) : Ax + By + C = 0 qua I(a, b).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với mỗi điểm $M(x, y) \in (d)$

$\Rightarrow$ tồn tại điểm $M_1(x_1, y_1) \in (d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 2a \\ y + y_1 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - x_1 \\ y = 2b - y_1 \end{cases} \qquad (I)$$

Bước 2: Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$$Ax_1 + By_1 - C - 2aA - 2bB = 0. \qquad (1)$$

Bước 3: Viết lại (1) dưới dạng:

$$Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0. \qquad (2)$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy một điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua I.

Bước 2: Vì $(d_1) // (d)$: Ax + By + C = 0 suy ra

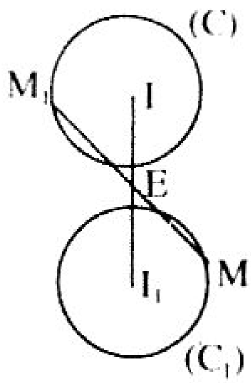
(d): Ax + By + D = 0.

Bước 3: Vì $A_1 \in (d_1) \Rightarrow$ giá trị của D.

Từ đó có được phương trình của (d_1).

Bài toán 3: Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C): $f(x, y)=0$ qua điểm $E(x_0, y_0)$ ($E\neq I$ là tâm của (C)).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với mỗi $M(x, y)\in(C_1) \Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1)\in(C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua $E(x_0, y_0)$ $\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 + x = 2x_0 \\ y_1 + y = 2y_0 \end{cases} \qquad (I)$$

Bước 2: Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường tròn (C_1).

Cách 2: Chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi I, I_1 theo thứ tự là tâm đường tròn (C), (C_1) và R là bán kính đường tròn (C). Khi đó E là trung điểm $II_1 \Rightarrow$ toạ độ điểm I_1.

Bước 2: Lập phương trình đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I_1 \\ \text{bán kính } R \end{cases}.$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d): x tâm 2y + 2 = 0 qua điểm I(1, 1).

Giải

Cách 1. Với mỗi điểm $M(x, y)\in(d) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_1(x_1, y_1)\in(d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 2 \\ y + y_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x_1 \\ y = 2 - y_1 \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$$(2 - x_1) - 2(2 - y_1) + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 = 0. \qquad (1)$$

Viết lại (1) dưới dạng: $x - 2y = 0$. (2)

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1).

Cách 2: Lấy một điểm $A(0, 1)\in(d)$, gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua $I \Rightarrow A_1(2, 1)$.

- Vì $(d_1)//(d)$: $x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow$ (d): $x - 2y + C = 0$.
- Vì $A_1\in(d_1) \Rightarrow C = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng (d_1): $x - 2y = 0$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD biết phương trình cạnh (AB): $2x - y = 0$, (AD): $4x - 3y = 0$ và tâm I(2, 2). Lập phương trình các cạnh BC và CD.

Giải

- Cạnh BC đối xứng với AD qua I, ta lần lượt thực hiện:

Với mỗi điểm $M(x, y)\in(AD) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_1(x_1, y_1)\in(d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 4 \\ y + y_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - x_1 \\ y = 4 - y_1 \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (I) vào phương trình của (AD), ta được:

$$4(4 - x_1) - 3(4 - y_1) = 0 \Leftrightarrow 4x_1 - 3y_1 - 4 = 0. \qquad (1)$$

Viết lại (1) dưới dạng: $4x - 3y - 4 = 0$. (2)

Đó chính là phương trình đường thẳng (BC).

- Cạnh CD đối xứng với AB qua I, ta lần lượt thực hiện :

Lấy điểm $O(0, 0) \in (AB)$, gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua I $\Rightarrow O_1(4, 4)$.

- Vì $(CD)//(AB)$: $2x - y = 0 \Rightarrow (CD)$: $2x - y + C = 0$.
- Vì $O_1 \in (CD) \Rightarrow C = -4$.

Vậy phương trình đường thẳng (d_1): $2x - y - 4 = 0$.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$. Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua điểm E(1, 2).

Giải

Cách 1: Với mỗi $M(x, y) \in (C_1) \Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua E

$\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2 = 2 \\ x_1 + x = 2 \\ y_1 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2 = 2 \\ x_1 = 2 - x \\ y_1 = 4 - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 2. \qquad (*)$$

Vậy phương trình đường tròn (C_1): $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Cách 2: Xét đường tròn (C) có tâm I(2, 1) và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Gọi I_1 là tâm đường tròn (C_1).

Vì (C) và (C_1) đối xứng qua điểm E $\Rightarrow$ E là trung điểm II_1, do đó: $I_1(0, 3)$.

Phương trình đường tròn (C_1) được cho bởi:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I_1(0,3) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): x^2 + (y - 3)^2 = 2.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua điểm I, biết:

a. (d): $2x - y + 4 = 0$ qua điểm I(−2, 1).

b. (d): $x - 2y - 5 = 0$ qua điểm I(2, 1).

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD biết phương trình các cạnh (AB): $x + 2y - 7 = 0$, (AD): $x - y + 2 = 0$ và tâm I(1, 1). Lập phương trình các cạnh BC và CD.

Bài tập 3: Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua điểm E, biết:

a. (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và E(2, −3).

b. (C): $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ và E(−1, 2).

CHỦ ĐỀ 2

PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho một đường thẳng (d). Phép đối xứng trục (d), ký hiệu S_d là một phép biến hình trên $\mathscr{P}$ biến điểm M thành M_1 sao cho (d) là đường trung trực của đoạn MM_1.

Vậy:

$$M_1 = S_d(M) \Leftrightarrow (d) \text{ là trung trực đoạn } MM_1.$$

Chú ý: Ta luôn có:

- $M_1 = S_d(M) \Rightarrow M = S_d(M_1)$.
- $M \in (d) \Rightarrow S_d(M) = M$.

2. TÍNH CHẤT

Phép đối xứng trục là phép dời hình.

Hệ quả: Phép đối xứng trục (d) bảo toàn:

- Khoảng cách giữa hai điểm.
- Tính thẳng hàng của các điểm, hơn nữa nếu điểm B ở giữa hai điểm A và C thì điểm $B_1 = S_d(B)$ cũng nằm giữa hai điểm $A_1 = S_d(A)$ và $C_1 = S_d(C)$.
- Số đo của một góc.

3. ẢNH CỦA MỘT SỐ HÌNH QUA PHÉP ĐỐI XỨNG S_d

- Ảnh của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng A_1B_1=AB.
- Ảnh của một đường thẳng là một đường thẳng.
- Ảnh của một tia là một tia.
- Ảnh của một đường tròn là một đường tròn bằng nó.

BÀI TOÁN 1

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh (H_1) là ảnh của (H_2) qua phép đối xứng trục (d), ta thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Lấy điểm M_1 tùy ý thuộc (H_1), ta đi chứng minh $M_2 = S_d(M_1) \in (H_2)$.
- *Bước 2:* Ngược lại, lấy điểm M_2 tùy ý thuộc (H_2), ta đi chứng minh $M_1 = S_d(M_2) \in (H_1)$.

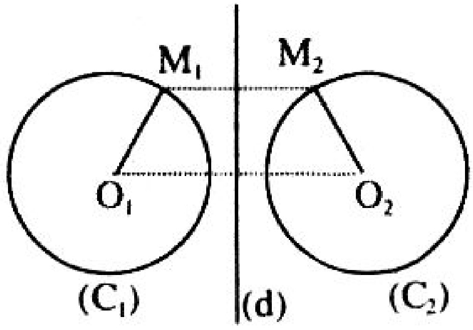
Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Xác định một hoặc nhiều phép đối xứng trục để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.
- *Bước 2:* Sử dụng các tính chất của phép đối xứng trục để giải các yêu cầu bài toán.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có tâm O_1, O_2 và đều có bán kính R. Chứng minh rằng (C_2) là ảnh của (C_1) qua phép đối xứng trục (d), với (d) là trung trực đoạn O_1O_2.

Giải



Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M qua S_d.

Vì O_2M_2 và O_1M_1 đối xứng nhau qua (d), nên ta có:

$$O_2M_2 = O_1M_1.$$

Ta có:

$$M_1 \in (C_1) \Leftrightarrow O_1M_1 = R$$
$$\Leftrightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$$

Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua S_d. Ta có:

$$M_2 \in (C_2) \Leftrightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow O_1M_1 = R \Rightarrow M_1 \in (C_1)$$

Vậy (C_2) là ảnh của (C_1) qua S_d.

Chú ý: Như vậy trong ví dụ trên chúng ta đã thực hiện yêu cầu "*Chứng minh (H_1) là ảnh của (H) qua phép đối xứng trục (d)*", ví dụ sau chúng ta sẽ thực hiện yêu cầu "*Tìm phép đối xứng trục (d) biến hình (H) thành (H_1)*" hoặc "*Chứng minh rằng tồn tại một phép đối xứng trục S_d biến hình (H) thành (H_1)*".

Ví dụ 2: Cho hai hình vuông ABCD và AMNP có cạnh bằng a. CMR tồn tại một phép đối xứng trục biến hình vuông ABCD thành AMNP.

Giải

Giả sử CD cắt MN tại E, ta đi chứng minh:

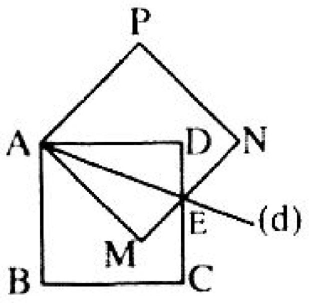
$S_{(AE)}(ABCD) = APNM$.

Thật vậy:

$\Delta AED = \Delta AEM \Rightarrow M = S_{(AE)}(D)$.

$\Delta AEC = \Delta AEN \Rightarrow N = S_{(AE)}(C)$.

$\Delta AEB = \Delta AEP \Rightarrow P = S_{(AE)}(B)$.



Ví dụ 3: Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, p là nửa chu vi, h_a là độ dài đường cao từ A. Chứng minh rằng:

$$h_a \le \sqrt{p(p-a)}.$$

Giải

Dựng đường thẳng (d) qua A song song với BC.

Gọi B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của B, C qua đường thẳng (d).

Ta có:

$AC_1 = AC = b$,

$AB_1 = AB = c$,

$BB_1 = CC_1 = 2AH = 2h_a$,

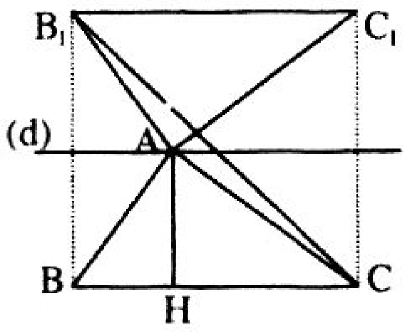
$BB' \perp BC$.

Xét ΔAB_1C, ta có:

$$AB_1 + AC \ge B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2}.$$

$$\Leftrightarrow b + c \ge \sqrt{a^2 + 4h_a^2}$$

$$\Leftrightarrow h_a^2 \le \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] = p(p-a) \Leftrightarrow h_a \le \sqrt{p(p-a)}\text{, đpcm.}$$



Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên để chứng minh tính chất $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$ chúng ta đã sử dụng một phép đối xứng trục (d), tuy nhiên điều đáng phải minh hoạ được ở đây là tại sao lại chọn trục (d) như vậy, điều này có thể được lý giải sơ lược như sau:

- Việc lựa chọn phép đối xứng trục (d) sẽ nhận được phần tử trung gian quan trọng là B_1C, phần tử này có được biểu diễn thông qua b và c hoặc qua a và h_a, từ đó nhận được mối liên hệ giữa a, b, c và h_a.
- Các em học sinh hãy trả lời thêm câu hỏi:
  "Có tồn tại phép đối xứng trục khác (d) không và nếu có thì tính chất của phép đối xứng đó là gì ?".

Ví dụ 4: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). Gọi H là trực tâm của tam giác.

a. Chứng minh rằng các điểm đối xứng của H qua các cạnh của ΔABC nằm trên đường tròn (O, R). Từ đó suy ra các đường tròn (HBC), (HCA) (HAB) và (O) bằng nhau.

b. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn (HBC), (HCA), (HAB) Chứng minh ΔABC và $\Delta O_1O_2O_3$ bằng nhau.

Giải

a. Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là điểm đối xứng của H qua các cạnh BC, CA, AB.

- Xét phép đối xứng trục BC, ta được:

$$S_{(BC)}: \widehat{BHC} \mapsto \widehat{BH_1C} \Rightarrow \widehat{BH_1C} = \widehat{BHC}.$$

Vì

$$\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{BH_1C} + \widehat{BAC} = 180^0$$

$\Rightarrow$ tứ giác ABH_1C nội tiếp được

$\Rightarrow H_1 \in (O, R)$.

- Chứng minh tương tự, ta được $H_2 \in (O, R)$, $H_3 \in (O, R)$.

Ta có:

$S_{(BC)}[(HBC)] = (H_1BC) = (O, R)$

$S_{(CA)}[(HCA)] = (H_2CA) = (O, R)$

$S_{(AB)}[(HAB)] = (H_3AB) = (O, R)$

$\Rightarrow (HBC) = (HCA) = (HAB) = (O,R)$, đpcm

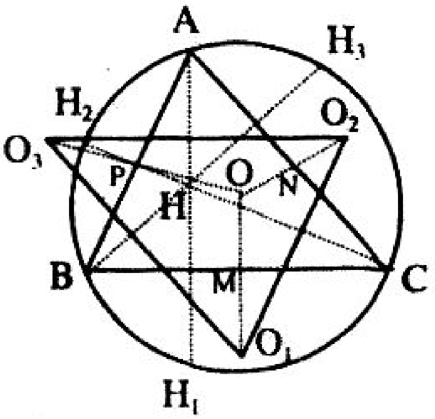
b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

Ta có ngay:

$S_{(BC)}: O \mapsto O_1$

$S_{(CA)}: O \mapsto O_2$

$S_{(AB)}: O \mapsto O_3$



Suy ra:

$\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow O_1O_2 = BA$,

$\overrightarrow{O_2O_3} = 2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow O_2O_3 = CB$,

$\overrightarrow{O_3O_1} = 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow O_3O_1 = AC$,

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$, đpcm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm ảnh của đường thẳng (Δ) qua phép đối xứng trục (d). Xét ba trường hợp:

a. $(\Delta) \perp (d)$.

b. (Δ)//(d).

c. (Δ) cắt (d).

Bài tập 2: Cho ΔABC đều. Xác định phép đối xứng trục biến ΔABC thành chính nó.

Bài tập 3: Cho ΔABC cân ($AB = AC \neq BC$). Xác định phép đối xứng trục biến ΔABC thành chính nó.

Bài tập 4: Cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB và A_1B_1. CMR cần nhiều nhất là tích hai phép đối xứng trục để biến A thành A_1, B thành B_1.

Bài tập 5: Lấy một điểm M trên đường phân giác ngoài góc C của ΔABC. Chứng minh rằng:

$$MA + MB > CA + CB.$$

Bài tập 6: Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD).$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Bài tập 7: Cho hai đường thẳng Ax và By cùng vuông góc với AB, M và N là hai điểm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB}$. Trên Ax lấy điểm P, trên By lấy điểm Q sao cho M nhìn đoạn PQ dưới một góc vuông. Chứng minh rằng điểm N cũng nhìn đoạn PQ dưới một góc vuông.

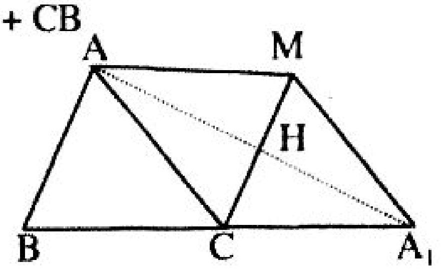
Bài tập 8: Cho điểm M ở trong ΔABC, A', B', c' theo thứ tự đối xứng với M qua các đường phân giác của góc A, B, C. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hoặc song song từng đôi một.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 5: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua phân giác ngoài CM của góc C, ta có:

$MA + MB = MA_1 + MB > A_1B = CA_1 + CB = CA + CB$

$\Leftrightarrow MA + MB > CA + CB$, đpcm.



BÀI TOÁN 2

SỬ DỤNG PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Sử dụng phép đối xứng trục tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

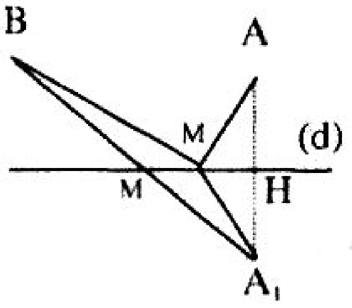
Bằng việc lựa chọn phép đối xứng trục thích hợp cho điểm M, ta đưa bài tóan tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về các biểu thức độ dài, khi đó ta cần nhớ các kết quả:

- $MA + MB \geq AB$.
- $|MA - MB| \leq AB$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B cùng phía với (d). Tìm điểm M trên (d) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Giải



Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d).

Ta có:

$$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B.$$

Vậy

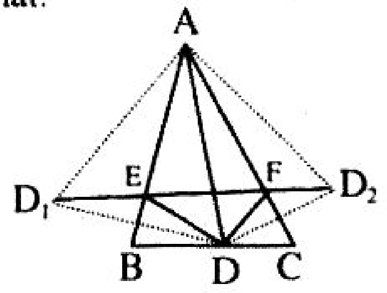
$$(MA + MB)_{Min} = A_1B,$$

đạt được khi A_1, M, B thẳng hàng.

Chú ý: Chúng ta sẽ còn gặp lại dạng toán này trong bài toán hệ toạ độ của phép đối xứng trục.

Ví dụ 2: Cho ΔABC nhọn, D là điểm cố định trên BC. Tìm hai điểm E, F theo thứ tự thuộc AB và AC sao cho ΔDEF có chu vi nhỏ nhất.

Giải



Gọi D_1 là điểm đối xứng với D qua AB.

Gọi D_2 là điểm đối xứng với D qua AC.

Ta có chu vi ΔDEF được cho bởi:

$$CV_{\Delta DEF} = DE + DF + EF = D_1E + D_2F + EF.$$

Vậy ΔDEF có chu vi nhỏ nhất

$\Leftrightarrow D_1E + D_2F + EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ EF thuộc đường thẳng D_1D_2

$\Leftrightarrow$ E, F theo thứ tự là giao điểm của D_1D_2 với AB, AC.

Khi đó $(CV_{\Delta DEF})_{Min} = D_1D_2$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h, hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp nhỏ nhất.

Bài tập 2: Cho góc xOy và điểm M thuộc miền trong của góc. Qua M dựng đường thẳng cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ΔAOB có diện tích nhỏ nhất trong tất cả các tam giác tạo bởi các tia Ox, Oy và một đường thẳng bất kì qua M.

Bài tập 3: Cho ΔABC nhọn.

a. Tìm ba điểm D, E, F theo thứ tự thuộc BC, AB và AC sao cho ΔDEF có chu vi nhỏ nhất.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔDEF theo các cạnh a, b, c của ΔABC.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1: Không mất tính tổng quát ta giả sử ΔABC có đáy BC = a cố định và độ dài đường cao AH = h.

Từ đó suy ra đỉnh A chạy trên đường thẳng (d) song song và cách BC một khoảng bằng h.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ah = pr \Leftrightarrow r = \dfrac{ah}{2p}$.

Vậy r nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ ΔABC có chu vi nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AB + AC nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ A, B, C_1 thẳng hàng, với C_1 là điểm đối xứng với C qua (d).

Bài tập 3:

a. Như đã biết trong ví dụ 2, với điểm D cố định thì

$$(CV_{\Delta DEF})_{Min} = D_1D_2.$$

Do đó, khi D di động trên BC, chu vi ΔDEF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D_1D_2 nhỏ nhất.

Trong ΔAD_1D_2, ta có: $AD_1 = AD_2 = AD$,

$$\widehat{D_1AD_2} = 2\hat{A} \text{ không đổi,}$$

do đó D_1D_2 nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $AD \perp BC$

$\Leftrightarrow$ D là chân đường cao đỉnh A của ΔABC.

Vì vai trò của D, E, F như nhau nên ta kết luận được rằng chu vi ΔDEF nhỏ nhất khi và chỉ khi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao của ΔABC.

b. Gọi K là trung điểm của D_1D_2, ta có:

$$D_1D_2 = 2D_1K = 2AD_1.\sin\widehat{D_1AK} = 2AD.\sin\hat{A}. \qquad (1)$$

Mặt khác ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AD.BC = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

suy ra:

$$AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}. \qquad (2)$$

$$\sin\hat{A} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $D_1D_2 = \dfrac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

Vậy $(CV_{\Delta DEF})_{Min} = \dfrac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

BÀI TOÁN 3

TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép đối xứng trục S_d, biến điểm E di động thành điểm M .

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép đối xứng trục S_d.

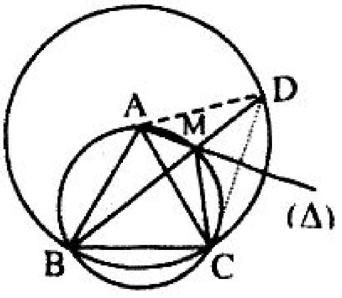
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC cân tại A. Một đường thẳng di động (Δ) qua A. Gọi D là điểm đối xứng của C qua (Δ). Đường thẳng BD cắt (Δ) tại M. Tìm quỹ tích các điểm D và M.

Giải

a. Tìm tập hợp điểm D

Từ giả thiết suy ra AD = AC không đổi, do đó quỹ tích các điểm D thuộc đường tròn tâm A, bán kính AC.



b. Tìm tập hợp điểm M

Ta có:

$$\widehat{BMC} = \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = 2\widehat{MDC}$$

$$= 2\widehat{BDC} = \widehat{BAC} \text{ không đổi.}$$

Vậy quỹ tích các điểm M thuộc cung tròn chứa góc A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O, R) trên đó có hai điểm A và B, một đường tròn (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài với (O) tại A. Một điểm M di động trên (O), tia MA cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai A_1. Qua A_1 vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia MB tại B_1. Tìm tập hợp điểm B_1.

Giải

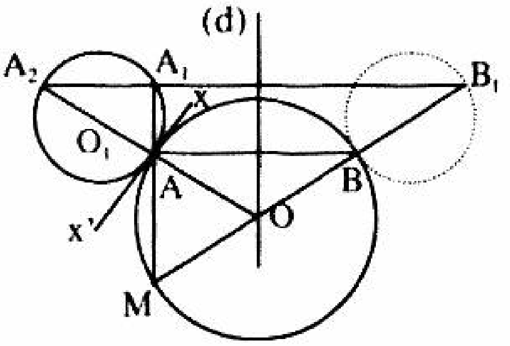
Gọi giao điểm thứ hai của B_1A_1 với đường tròn (O_1) là A_2.

Kẻ tiếp tuyến chung x'x của (O) và (O_1) tại A, ta có:

$$\widehat{A_1B_1B} = \widehat{ABM} = \widehat{x'AM}$$

$$= \widehat{xAA_1} = \widehat{AA_2A_1} .$$

Suy ra hình thang ABB_1A_2 cân, nên A_2 và B_1 đối xứng với nhau qua trung trực (d) của AB.



Ta có:

- Khi M di động trên (O) thì A_2 di động trên (O_1), suy ra tập hợp các điểm A_2 là đường tròn (O_1).
- $B_1 = S_d(A_2)$ nên tập hợp các điểm B_1 là đường tròn (O_2) với

$$(O_2) = S_d(O_1).$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC, biết B, C thuộc đường thẳng (d) cố định, trực tâm H cố định và đường tròn ngoại tiếp ΔABC đi qua điểm P cố định. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài tập 2: Cho góc nhọn xOy, ở bên trong góc đó có một tia Oz cố định, M là điểm di động trên tia Oz . Gọi M_1 và M_2 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua Ox và Oy. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn M_1M_2.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O) và một dây cung AB của đường tròn đó. Tìm tất cả các tam giác nội tiếp trong đường tròn (O) và có một cạnh là dây AB.

BÀI TOÁN 4
DỰNG HÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta luôn thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tích.

Bước 2: Cách dựng.

Bước 3: Chứng minh.

Bước 4: Biện luận.

Chú ý: Để dựng một điểm, ta xem điểm đó là điểm chung của hai tập hợp điểm. Dựng hai tập hợp điểm này ta được điểm cần dựng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường thẳng xx' và hai điểm P, Q cùng nằm một phía đối với xx'. Dựng điểm $A \in xx'$ sao cho $\widehat{PAx} = \widehat{QAx'}$.

Giải

a. Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm $A \in xx'$ sao cho

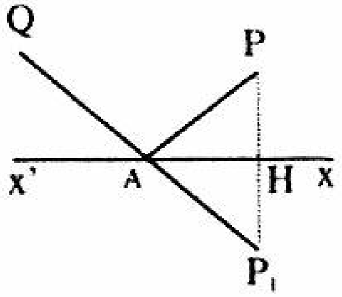
$\widehat{PAx} = \widehat{QAx'}$.

Thực hiện phép đối xứng trục (xx').

$S_{(xx')}: P \mapsto P_1$.

Khi đó

$\widehat{PAx} = \widehat{P_1Ax} = \widehat{QAx'} \Leftrightarrow P_1, A, Q$ thẳng hàng.



b. Cách dựng

- Dựng điểm P_1 với $P_1 = S_{(xx')}(P)$
- Lấy điểm chung A của (xx') và (P_1Q)

Khi đó A là điểm phải dựng.

c. Chứng minh

Theo cách dựng, ta có:

$\widehat{QAx'} = \widehat{P_1Ax} = \widehat{PAx}$

d. Biện luận

Số nghiệm của bài toán bằng số nghiệm chung của (xx') và $(P_1Q) \Rightarrow$ luôn tồn tại duy nhất một điểm A.

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng (d). Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, C lần lượt trên (O_1) và (O_2), hai đỉnh B và D trên (d).

Giải

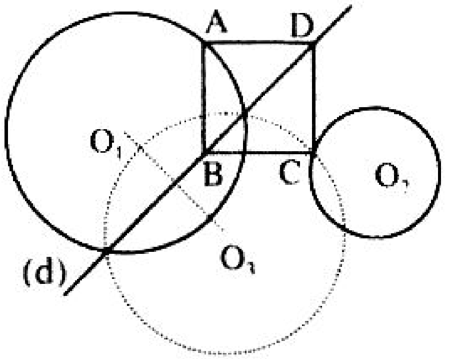
a. Phân tích

Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD có A, C lần lượt trên (O_1) và (O_2), B và D ở trên (d).

Thực hiện phép đối xứng trục (d).

$S_{(d)}: A \mapsto C,$

$(O_1) \mapsto (O_3).$



Khi đó $C \in (O_3)$.

Vậy C là một trong hai giao điểm của (O_3) và (O_2).

b. Cách dựng

- Dựng đường tròn (O_3) với $(O_3) = S_{(d)}[(O_1)]$.
- Lấy điểm chung C của (O_3) và (O_2).
- Dựng điểm A với $A = S_{(d)}(C)$.
- AC cắt (d) tại I.
- Trên (d) dựng B và D đối xứng nhau qua I sao cho IB = IC, thì ABCD là hình vuông phải dựng.

c. Chứng minh

Theo cách dựng, tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường nên là hình vuông và:

- $B, D \in (d)$, $C \in (O_2)$.
- Vì $(O_1) = S_{(d)}[(O_3)]$, $A = S_{(d)}(C)$, $C \in (O_3)$ nên $A \in (O_1)$.

d. Biện luận

Số nghiệm hình của bài toán bằng số nghiệm chung của (O_3) và (O_2).

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng (d). Dựng điểm M trên (d) sao cho tiếp tuyến kẻ từ M tới (O_1) và (O_2) tạo thành một góc nhận (d) làm đường phân giác.

Giải

a. Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm M thoả mãn điều kiện đầu bài.

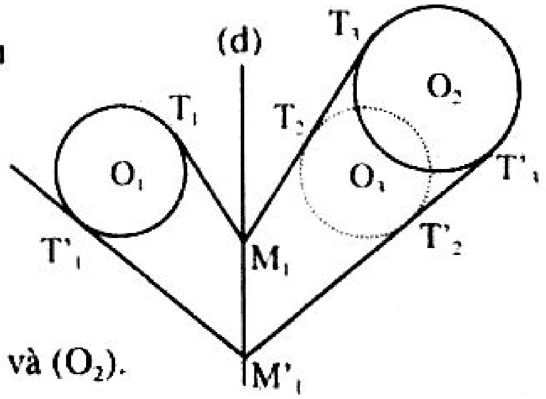
Thực hiện phép đối xứng trục (d).

$S_{(d)}(MT_1) = (MT_3).$

$S_{(d)}(O_1) = (O_3).$

Khi đó MT_3 cũng là tiếp tuyến của (O_3).

Vậy MT_3 là một tiếp tuyến chung của (O_3) và (O_2).



b. Cách dựng

- Dựng đường tròn (O_3) đối xứng với (O_1) qua (d).
- Dựng tiếp tuyến chung T_2T_3 của (O_3) và (O_2).

- Đường thẳng T_2T_3 cắt (d) tại M

Khi đó M là điểm cần dựng.

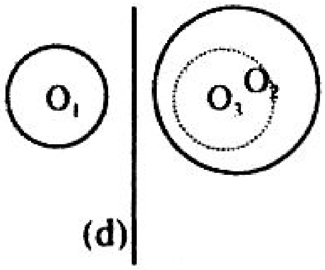
c. Chứng minh

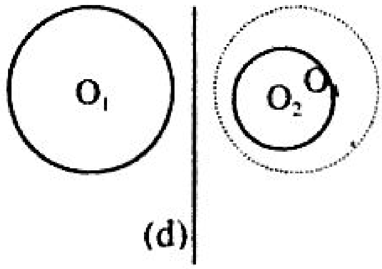
Thật vậy lấy $MT_1 = S_{(d)}(MT_3) \Rightarrow MT_1$ tiếp xúc với (O_1) và góc $\widehat{T_1MT_2}$ nhận (d) làm đường phân giác.

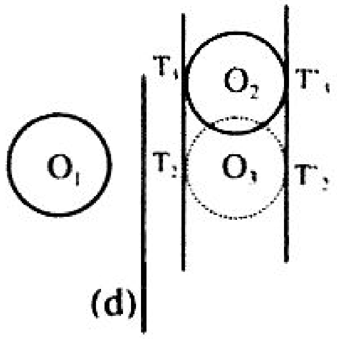
d. Biện luận

Số nghiệm điểm M của bài toán bằng số giao điểm của tiếp tuyến chung của (O_3) và (O_2) với đường thẳng (d).

Hình sau minh hoạ ba trường hợp vô nghiệm







III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Dựng ảnh của ΔABC cho trước qua phép đối xứng trục mà trục là:

a. Đường thẳng AB.

b. Đường phân giác AD.

Bài tập 2: Dựng ảnh của đường tròn (O) cho trước qua phép đối xứng trục mà trục là:

a. Đường thẳng (d) không đi qua tâm O.

b. Đường thẳng (d) đi qua tâm O.

Bài tập 3: Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm cùng một phía đối với (d). Hãy xác định điểm $M \in (d)$ sao cho đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ nằm trên (d).

Bài tập 4: Cho đường thẳng xx' và hai điểm P, Q cùng nằm một phía đối với xx'. Dựng điểm $A \in xx'$ sao cho $\widehat{PAx} = 2\widehat{QAx'}$.

Bài tập 5: Cho ba đường tròn (d_1), (d_2) và (d_3). Dựng hình vuông ABCD có A, C thuộc (d_1), còn B, D theo thứ tự thuộc (d_2) và (d_3).

Bài tập 6: Trên đường tròn (O) cho hai dây cung AB và CD không cắt nhau và một điểm I trên dây CD. Dựng một điểm M trên (O) sao cho các dây cung AM và BN chắn CD một đoạn EF nhận I là trung điểm.

Bài tập 7: Cho góc xOy, tia đối của tia Ox là tia Ox'. Trong góc x'Ox có hai điểm A, B sao cho đoạn thẳng AB không song song cũng như không vuông góc với Oy. Dựng điểm C trên tia Ox sao cho tia Oy cắt các đoạn AC, CB tại các điểm tương ứng M, N tạo thành tam giác AMN cân tại C.

Bài tập 8: Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Hãy dựng một tam giác có đỉnh A, mỗi đỉnh còn lại nằm trên một cạnh của góc đã cho và sao cho chu vi tam giác nhỏ nhất.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 4:

a. Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm $A \in xx'$ sao cho $\widehat{PAx} = 2\widehat{QAx'}$.

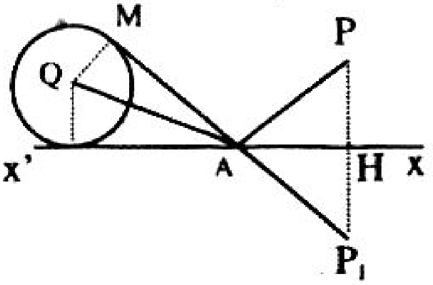
Thực hiện phép đối xứng trục (xx').

$S_{(xx')}: P \mapsto P_1$.

Khi đó

$\widehat{PAx} = \widehat{P_1Ax} = 2\widehat{QAx'} = \widehat{MAx'}$

$\Leftrightarrow P_1$, A, M thẳng hàng.



b. Cách dựng

- Dựng điểm P_1 với $P_1 = S_{(xx')}(P)$
- Dựng đường tròn tâm Q tiếp xúc với xx'.
- Dựng tiếp tuyến qua P_1M tới (Q).
- Lấy điểm chung A của (xx') và (P_1M)

Khi đó A là điểm phải dựng.

Chứng minh và biện luận - Đề nghị bạn đọc tự giải.

BÀI TOÁN 5

HỆ TOẠ ĐỘ ĐỐI VỚI PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong phần này có một vài kiến thức mở rộng hơn so với kiến thức Toán 10, do vậy để tiện theo dõi các em học sinh cần biết:

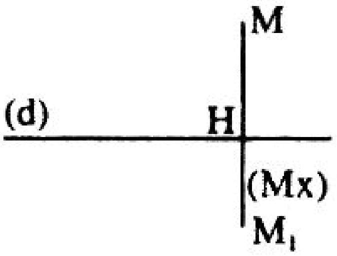
1. Phương trình đường thẳng.
2. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm, đường thẳng song song, đường thẳng vuông góc.
3. Phương trình đường tròn.

Tuy nhiên các tác giả đã cố gắng trình bày cho thật dễ hiểu đối với các em học sinh lớp 10. Trong phần này chúng ta xét ba bài toán cơ bản và mong muốn thông qua đó các em có thể xây dựng được phương pháp giải bài toán tổng quát.

Bài toán 1: Xác định điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường thẳng (d): Ax + By + C = 0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \,//\, \overrightarrow{n_d}(A, B) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc (d)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(x_{M_1} - x_M) - A(y_{M_1} - y_M) = 0 \\ A\left(\dfrac{x_{M_1} + x_M}{2}\right) + B\left(\dfrac{y_{M_1} + y_M}{2}\right) + C = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Bước 2: Giải hệ (I) ta được toạ độ điểm M_1.

Chú ý:

1. Cũng có thể thực hiện theo cách:

   Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của M trên (d).

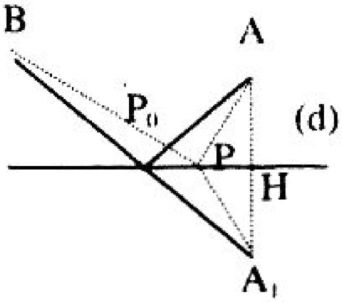
   Bước 2: Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua (d) thì H là trung điểm MM_1, ta được:

$$\begin{cases} x_{M_1} = 2x_H - x_M \\ y_{M_1} = 2y_H - y_M \end{cases}.$$

2. Ảnh của điểm $M(x_0, y_0)$ qua phép đối xứng:
   - Trục Ox là $M_1(x_0, -y_0)$.
   - Trục Oy là $M_1(-x_0, y_0)$.

3. Như chúng ta đã biết, việc tìm ra toạ độ điểm M_1 sẽ cho phép ta giải được dạng toán với yêu cầu:

"Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B cùng phía với (d). Tìm điểm P trên (d) sao cho PA + PB nhỏ nhất."



Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d), suy ra toạ độ A_1.

Bước 2: Gọi $P_0 = (A_1B) \cap (d)$

$$\begin{cases} P_0 \in (d) \\ P_0, A, B \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ } P_0.$$

Bước 3: Ta có $PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B$.

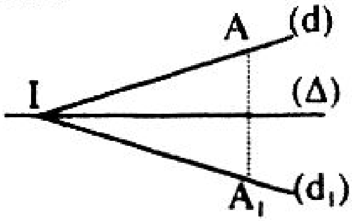
Vậy $(PA + PB)_{Min} = A_1B$, đạt được khi A_1, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

Bài toán 2: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét hai khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $(d) \cap (\Delta) = \{I\}$. Thực hiện theo các bước:



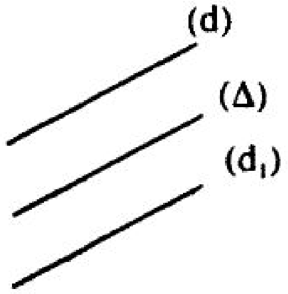
Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I.

Bước 2: Lấy một điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (Δ).

Bước 3: Đường thẳng (d_1) qua I và A_1.

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{qua } A_1 \end{cases}.$$

Khả năng 2: Nếu (d)//(Δ). Thực hiện theo các bước:



Bước 1: Viết lại phương trình của (d), (Δ) dưới dạng:

$(d): Ax + By + C_d = 0$

$(\Delta): Ax + By + C_\Delta = 0.$

Bước 2: Khi đó:

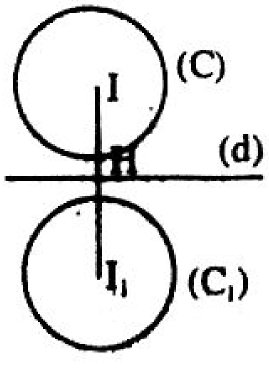
$(d_1): Ax + By + C = 0$

với C được xác định bởi: $C_\Delta = \frac{1}{2}(C_d + C)$.

Bài toán 3: Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C): f(x, y) = 0 qua đường thẳng (d).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Gọi I, I_1 theo thứ tự là tâm đường tròn (C), (C_1) và R là bán kính đường tròn (C).

Bước 2: Xác định toạ độ điểm I_1 đối xứng với I qua (d).

Bước 3: Lập phương trình đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I_1 \\ \text{bán kính } R \end{cases}.$$

Chú ý. Trong trường hợp đường thẳng (d) có dạng $x = \alpha$ (hoặc $y = \beta$) ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với mỗi $M(x, y) \in (C_1) \Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua đường thẳng $x = \alpha$ (hoặc $y = \beta$) $\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 + x = 2\alpha \\ y_1 = y \end{cases} \quad \left(\text{hoặc } \begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 = x \\ y_1 + y = 2\beta \end{cases}\right) \qquad (I)$$

Bước 2: Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường tròn (C_1).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường thẳng (d): $3x + 4y - 12 = 0$ và điểm M(7, 4). Tìm toạ độ điểm M_1 là điểm đối xứng với M qua (d).

Giải

Giả sử $M_1(x, y)$, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} // \overrightarrow{n_d}(3,4) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc}(d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-7) - 3(y-4) = 0 \\ 3\left(\dfrac{x+7}{2}\right) + 4\left(\dfrac{y+4}{2}\right) - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Vậy $M_1(1, -4)$

Ví dụ 2: Cho điểm M(3, −1) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 4t \\ y = 3 + 3t \end{cases}, t \in R.$$

Tìm toạ độ điểm M_1 là điểm đối xứng với M qua (d).

Giải

Vì $H \in (d)$, suy ra:

$$H(4t, 3 + 3t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(4t - 3, 3t + 4).$$

Gọi $\vec{a}$ là vtcp của (d), ta được: $\vec{a}(4, 3)$.

Vì $MH \perp (d)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} . \vec{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(4t - 3) + 3(3t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(0, 3).$$

- M_1 là điểm đối xứng với M qua (d) $\Rightarrow$ H là trung điểm MM_1, do đó:

$$\begin{cases} x_M + x_{M_1} = 2x_H \\ y_M + y_{M_1} = 2y_H \end{cases} \Rightarrow M_1(-3, 7).$$

Ví dụ 3: Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất, biết A(1, 1) và B(3, 3), tìm giá trị nhỏ nhất đó.

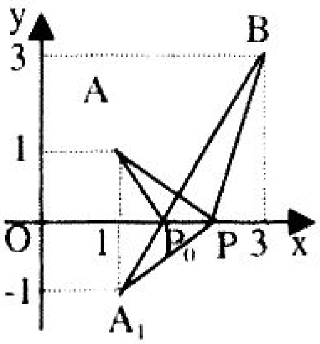
Giải

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox $\Rightarrow A_1(1, -1)$.

Gọi $P_0 = (A_1B) \cap Ox$, suy ra $P_0(x, 0)$, A, B thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AP_0} // \overrightarrow{AB} \\ y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - y - 3 = 0 \\ y = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0\end{cases} \Rightarrow P_0(\tfrac{3}{2}, 0).$$



Ta có

$$PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B.$$

Vậy

$$(PA + PB)_{Min} = A_1B = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

đạt được khi:

$$A_1, P, B \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow P \equiv P_0(\tfrac{3}{2}, 0).$$

Ví dụ 4: (Đại học Thương Mại - 2000): Cho ΔABC biết $A(2, -1)$ và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $x - 2y + 1 = 0$ và (d_C): $x + y + 3 = 0$. Lập phương trình cạnh BC.

Giải

Nhận xét rằng: nếu lấy A_1, A_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A qua (d_B) và (d_C) thì $A_1, A_2 \in BC$.

Vậy, phương trình đường thẳng (A_1A_2) cũng chính là phương trình đường thẳng (BC). Ta lần lượt đi xác định A_1, A_2:

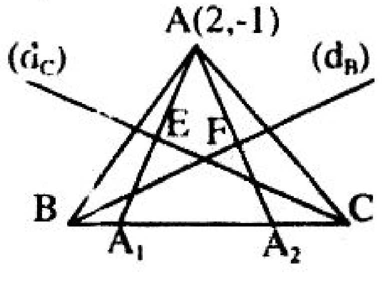
a. *Xác định A_1.*

Gọi (d_1) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d_1): \begin{cases}\text{qua } A \\ (d_1) \perp (d_B)\end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases}\text{qua } A(2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_B(2,1)\end{cases} \Leftrightarrow (d_1): 2x + y - 3 = 0.$$

Gọi $E = (d_1) \cap (d_B)$, toạ độ điểm E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0\end{cases} \Rightarrow E(1, 1).$$



Vì E là trung điểm AA_1, do đó:

$$\begin{cases}x_{A_1} = 2x_E - x_A = 0 \\ y_{A_1} = 2y_E - y_A = 3\end{cases} \Leftrightarrow A_1(0, 3).$$

b. *Xác định A_2.*

Gọi (d_2) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d_2): \begin{cases}\text{qua } A \\ (d_2) \perp (d_C)\end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases}\text{qua } A(2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_C(1,-1)\end{cases} \Leftrightarrow (d_2): x - y - 3 = 0.$$

Gọi $F = (d_2) \cap (d_C)$, toạ độ điểm F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x - y - 3 = 0 \\ x + y + 3 = 0\end{cases} \Rightarrow F(0, -3).$$

Vì F là trung điểm AA_2, do đó:

$$\begin{cases} x_{A_2} = 2x_F - x_A = -2 \\ y_{A_2} = 2y_F - y_A = -5 \end{cases} \Leftrightarrow A_2(-2, -5).$$

Vậy, phương trình (BC) được xác định bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } A_1(0,3) \\ \text{qua } A_2(-2,-5) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): 4x - y + 3 = 0.$$

Ví dụ 5: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ), biết:

a. (d): $4x - y + 3 = 0$ và (Δ): $x - y = 0$.

b. (d): $6x - 3y + 4 = 0$ và (Δ): $4x - 2y + 3 = 0$.

Giải

a. Nhận xét rằng $(d) \cap (\Delta) = \{I\}$, khi đó toạ độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1, -1).$$

Lấy điểm $A(0, 3) \in (d)$, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (Δ), ta có:

- $(AH) \perp (\Delta) \Rightarrow (AH): x + y + C = 0.$
- $A \in (AH) \Leftrightarrow 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3.$

Vậy (AH): $x+y-3=0$. Khi đó toạ độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}).$$

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (Δ) ⇒ H là trung điểm $AA_1 \Rightarrow A_1(3, 0)$.
Đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I(-1,-1) \\ \text{qua } A_1(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x+1}{3+1} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow (d_1): x - 4y - 3 = 0$$

b. Nhận xét rằng (d)//(Δ), khi đó viết lại phương trình hai đường thẳng dưới dạng:

$$(d): 2x - y + \frac{4}{3} = 0 \text{ và } (\Delta): 2x - y + \frac{3}{2} = 0.$$

Khi đó (d_1): $2x - y + C = 0$,
với C được xác định bởi:

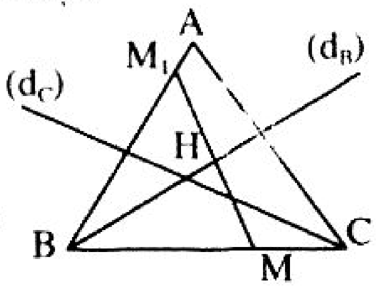
$$C_\Delta = \frac{1}{2}(C_d + C) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + C) \Leftrightarrow C = \frac{5}{3}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d_1): $2x-y+\frac{5}{3}=0$.

Ví dụ 6: Cho ΔABC biết phương trình cạnh (BC): $4x - y + 3 = 0$ và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $x - 2y + 1 = 0$ và (d_C): $x + y + 3 = 0$. Lập phương trình cạnh AB, AC.

Giải

- Cạnh AB đối xứng với BC qua (d_B), ta lần lượt thực hiện:



Toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B(-\frac{5}{7}, \frac{1}{7}).$$

Lấy một điểm $M(0, 3) \in (BC)$, gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (d_B).

Gọi (d_M) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d_M) : \begin{cases} \text{qua } M \\ (d_M) \perp (d_B) \end{cases} \Leftrightarrow (d_M) : \begin{cases} \text{qua } M(0,3) \\ \text{vtpt } \vec{a}_B(2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1) : 2x + y - 3 = 0.$$

Vì $(d_M) \cap (d_B) = \{H\}$, toạ độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1, 1).$$

Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua $(d_B) \Rightarrow$ H là trung điểm AA_1

$\Rightarrow M_1(2, -1)$.

Phương trình cạnh (AB) được cho bởi:

$$(AB) : \begin{cases} \text{qua } B(-\frac{5}{7}, \frac{1}{7}) \\ \text{qua } M_1(2, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB) : \frac{x - 2}{-\frac{5}{7} - 2} = \frac{y + 1}{\frac{1}{7} + 1}$$

$\Leftrightarrow (AB) : 8x + 21y + 5 = 0.$

- Cạnh AC đối xứng với BC qua (d_C). (*Tương tự*)

Ví dụ 7: Cho đường tròn

$(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$, (có tâm I(1, 2) và bán kính $R = \sqrt{2}$).

Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (d), biết:

a. (d): $x - 2 = 0$.

b. (d): $y - 1 = 0$.

Giải

a. Với mỗi $M(x, y) \in (C_1)$

$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua đường thẳng $x = 2$.

$\Leftrightarrow \exists\, x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 2 \\ x_1 + x = 4 \\ y_1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 2 \\ x_1 = 4 - x \\ y_1 = y \end{cases}$$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2.$

Vậy phương trình đường tròn (C_1): $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

b. Với mỗi $M(x, y) \in (C_1)$

$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua đường thẳng $y = 1$

$\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 2 \\ x_1 = x \\ y_1 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 2 \\ x_1 = x \\ y_1 = 2 - y \end{cases}$$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2.$

Vậy phương trình đường tròn (C_1): $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Ví dụ 8: Cho ΔABC biết B(0, 1), C(1, 0) và trực tâm H(2, 1). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Lập phương trình cạnh AB, thoả mãn :

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{vtpt } \overrightarrow{CH} \end{cases}$$

Lập phương trình cạnh AC, thoả mãn :

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } C \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BH} \end{cases}$$

Từ đó xác định được toạ độ điểm $A = (AB) \cap (AC)$.

Lập phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

Cách 2: Nhận xét rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp ΔHBC qua BC. Do đó:

Lập phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm H, B, C.

Lập phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua BC.

Nhận xét: Cách 2 cho phép ta giải được bài toán mang tính quĩ tích như sau

> "Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết phương trình cạnh BC và đường tròn ngoại tiếp ΔHBC"

trong khi đó nếu thực hiện bằng cách 1 sẽ rất phức tạp.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC biết A(1, 3), B(5, 1), C(−3, −1).

a. Tìm toạ độ điểm H là trực tâm ΔABC.

b. Tìm toạ độ điểm K đối xứng với H qua BC.

Bài tập 2: (Đề 97-Va): Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A(1, 2) và B(3, 4) là nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó

Bài tập 3: Cho ΔABC biết A(0, 3) và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $x - y = 0$ và (d_C): $2x + y - 6 = 0$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài tập 4: Cho ΔABC biết A(4, −1) và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $2x - 3y + 12 = 0$ và (d_C): $2x + 3y = 0$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài tập 5: Cho ΔABC biết A(3, 5), B(4, −3) và phân giác trong của góc C có phương trình (d_C): $x + 2y - 8 = 0$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài tập 6: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ), biết:

a. (d): $x + 2y - 13 = 0$ và (Δ): $2x - y - 1 = 0$.

b. (d): $x - 3y + 3 = 0$ và (Δ): $2x - 6y + 3 = 0$.

c. (d): $x - 3y + 6 = 0$ và (Δ): $2x - y - 3 = 0$.

Bài tập 7: Cho ΔABC biết phương trình cạnh (BC): $9x + 11y + 5 = 0$ và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $2x - 3y + 12 = 0$ và (d_C): $2x + 3y = 0$. Lập phương trình cạnh AB, AC.

Bài tập 8: Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (d), biết:

a. (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ và (d): $y - 3 = 0$.

b. (C): $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ và (d): $x - 2 = 0$.

Bài tập 9: Cho ΔABC biết B(1, 1), C(3, 2) và trực tâm H(2, 2). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

PHẦN MỞ RỘNG THÊM

Trong cuốn " Học và Ôn tập Đại số 10 " chúng ta đã miêu tả phép đối xứng trục $x = a$ dưới dạng một hàm chẵn và khi đó đường thẳng $x = a$ chính là trục đối xứng của đồ thị hàm số. Một câu hỏi được đặt ra tự nhiên là " Khi nào đồ thị hàm số có trục đối xứng là những đường xiên, dạng $y = ax + b$ và nếu có thì phương pháp chứng minh là gì ? ". Trong mục này chúng ta cùng xem xét hai bài toán rất cơ bản của hàm số liên quan tới trục đối xứng dạng $y = ax + b$. Trước hết ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi các đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ (có dạng $y = -\frac{1}{a}x + m$) nếu cắt đồ thị tại A và B thì trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng $y = ax + b$.

Ta sẽ xem xét từng dạng toán một.

1. DẠNG 1: TRỤC ĐỐI XỨNG NGHIÊNG

Bài toán 1. CMR đường thẳng (d): $y = ax + b$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi $(\Delta)\perp(d)$: $y = ax + b \Rightarrow$ phương trình (Δ): $y = -\frac{1}{a}x + m$.

Bước 2: Giả sử (Δ) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{a}x - m = 0 \qquad (1)$$

Sử dụng hệ thức Viét ta được

$$\begin{cases} x_A + x_B \\ x_A x_B \end{cases}.$$

Bước 3: Gọi I là trung điểm AB, ta có

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -\dfrac{1}{a}x_I + m \end{cases}.$$

Thay toạ độ của I vào (d) $\Rightarrow$ nhận xét $I \in (d)$.

Bước 4: Vậy, (d): $y = ax + b$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Chú ý. Trong bài toán này ta không cần tìm điều kiện của tham số m để phương trình (1) có nghiệm.

Ví dụ 1: (Đề 114): Cho hàm số:

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

CMR đường thẳng y = x + 2 là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Giải

Đường thẳng y = x + 2 là trục đối xứng của đồ thị hàm số ⇔ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng y = x + 2 (có dạng y = −x + m) nếu cắt đồ thị tại A và B thì trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng y = x + 2.

Hoành độ giao điểm A, B là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x-1}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - 1 - m = 0 \qquad (1)$$

Giả sử x_A, x_B là các nghiệm của (1) thì:

$$\begin{cases} x_A + x_B = m - 2 \\ x_A x_B = -m - 1 \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$I: \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow I: \begin{cases} x_I = \dfrac{m-2}{2} \\ y_I = \dfrac{m+2}{2} \end{cases}.$$

Thay toạ độ của I vào phương trình đường thẳng y = x + 2, ta được:

$$\frac{m+2}{2} = \frac{m-2}{2} + 2 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

⇔ I thuộc đường thẳng y = x + 2

Vậy, đường thẳng y = x + 2 là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

2. DẠNG 2: TÌM ĐIỂM ĐỐI XỨNG

Bài toán 2: Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số y = f(x) đối xứng qua đường thẳng (d) có phương trình: y = ax + b.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định D của hàm số y = f(x).

Bước 2: Gọi (Δ)⊥(d): y = ax + b ⟹ phương trình (Δ): $y = -\frac{1}{a}x + m$.

Bước 3: Giả sử (Δ) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{a}x - m = 0 \qquad (1)$$

Để tồn tại A, B thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt thuộc D

⇔ **tham số .**

Sử dụng hệ thức Viét ta được

$$\begin{cases} x_A + x_B \\ x_A x_B \end{cases}.$$

Bước 4: Gọi I là trung điểm AB, ta có

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -\dfrac{1}{a}x_I + m \end{cases}.$$

- Hai điểm A, B đối xứng qua đường thẳng (d) ⇔ $I \in (d)$ ⇔ m.
- Thay m vào (1) ta có được hoành độ A, B là x_A, x_B.
- Khi đó: $A(x_A, -\frac{1}{a}x_A + m)$ và $B(x_B, -\frac{1}{a}x_B + m)$.

Ví dụ 2: (Đề 48/Đại học Hàng Hải - 1999): Cho hàm số :

$$y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Tìm hai điểm A, B nằm trên đồ thị và đối xứng nhau qua (d): $y = x - 1$.

Giải

Hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng (d) ⇔ $AB \perp (d)$ và trung điểm I của AB thuộc (d).

- Vì $AB \perp (d)$: $y = x - 1 \Rightarrow (AB)$: $y = -x + m$.

Hoành độ giao điểm A, B là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - (m+1)x + m = 0 \qquad (1)$$

Để A, B tồn tại thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta_g > 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 8m > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 3 + \sqrt{8} \text{ hoặc } m < 3 - \sqrt{8}.$$

Khi đó, giả sử x_A, x_B là các nghiệm của (1) thì:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m+1}{2} \\ x_A x_B = \dfrac{m}{2} \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$I: \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow I: \begin{cases} x_I = \dfrac{m+1}{4} \\ y_I = \dfrac{3m-1}{4} \end{cases}.$$

- Điểm $I \in (d) \Leftrightarrow \frac{3m-1}{4} = \frac{m+1}{4} - 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Với $m = -1$:

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_B = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\frac{1}{\sqrt{2}}/, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases}.$$

3. VÍ DỤ LUYỆN TẬP

Bài tập 1: (ĐH Y Hải phòng - 2000): Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Tìm hai điểm A, B nằm trên đồ thị và đối xứng nhau qua (d): $y = x + 1$.

Bài tập 2: (Đề 66): Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$.

Tìm hai điểm A, B nằm trên đồ thị và đối xứng nhau qua (d): $y = x$.

Bài tập 3: (ĐH Dược - 1999): Giải thích tại sao phương trình

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = m(x+1)$$

với $m > 1$ có hai nghiệm phân biệt có tổng không đổi.

CHỦ ĐỀ 3

PHÉP TỊNH TIẾN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho một vectơ $\vec{v}$. Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$ là một phép biến hình trên $\mathscr{P}$ biến điểm M thành M_1 sao cho

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{v}$$

Như vậy:

$$M_1 = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

2. TÍNH CHẤT

Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ là một phép dời hình.

Hệ quả: Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ bảo toàn:

- Khoảng cách giữa hai điểm.
- Tính thẳng hàng của các điểm, hơn nữa nếu điểm B ở giữa hai điểm A, C thì điểm $B_1 = T_{\vec{v}}(B)$ cũng nằm giữa hai điểm $A_1 = T_{\vec{v}}(A)$ và $C_1 = T_{\vec{v}}(C)$.
- Số đo của một góc.

3. ẢNH CỦA MỘT SỐ HÌNH QUA MỘT PHÉP TỊNH TIẾN $T_{\vec{v}}$

- Ảnh của một vectơ $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.
- Ảnh của một đường thẳng d là một đường thẳng d' cùng phương với d.
- Ảnh của một tia Ax là một tia A'x' cùng hướng với Ax.
- Ảnh của một đường tròn là một đường tròn bằng nó.

$$T_{\vec{v}}(O,R) = (O',R')$$

BÀI TOÁN 1

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh (H_1) là ảnh của (H_2) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tùy ý thuộc (H_1), ta đi chứng minh $M_2 = T_{\vec{v}}(M_1) \in (H_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tùy ý thuộc (H_2), ta đi chứng minh $M_1 = T_{\vec{v}}(M_2) \in (H_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

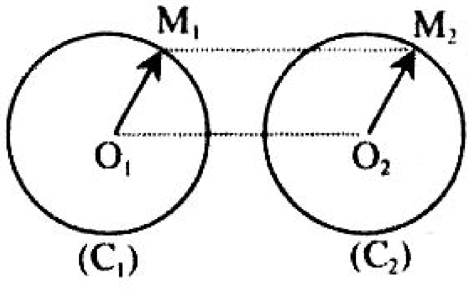
Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép tịnh tiến để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép tịnh tiến để giải các yêu cầu bài toán.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có tâm O_1, O_2 và đều có bán kính R. Chứng minh rằng (C_2) là ảnh của (C_1) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Giải



Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, ta có:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O_2M_2}$$

$$\Rightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$$

Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, ta có:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O_2M_2}$$

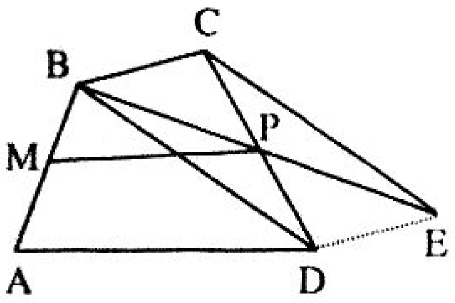
$$\Rightarrow O_1M_1 = R \Leftrightarrow M_1 \in (C_1)$$

Vậy (C_2) là ảnh của (C_1) qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$.

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$MP + NQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \qquad (*)$$

Giải



Thực hiện phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}: D \mapsto E$.

Khi đó tứ giác BCED là hình bình hành, vì P là trung điểm của CD nên P cũng là trung điểm của BE.

Do đó ta có:

$$MP = \frac{1}{2}AE \le \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \qquad (1)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra $\Leftrightarrow$ A, D, E thẳng hàng $\Leftrightarrow$ AD//BC

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$NQ \le \frac{1}{2}(AB + CD). \qquad (2)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra $\Leftrightarrow$ AB//CD

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$MP + NQ \le \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \qquad (3)$$

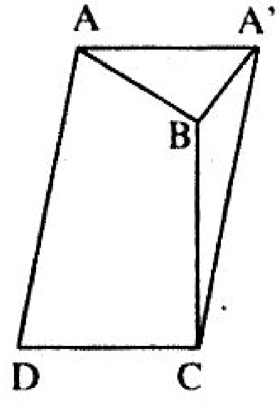
Vậy để có (*) thì dấu "=" xảy ra ở (3) $\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra tại (1) và (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ BC // AD \end{cases} \Leftrightarrow \text{ABCD là hình bình hành.}$$

Chú ý: Bằng việc thiết lập được các phép tịnh tiến thích hợp, ngoài việc chứng minh được các tính chất hình học ta còn có thể tính toán được các yếu tố trong một hình, để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Tứ giác ABCD có $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 60^0$. Tìm số đo góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCD}$.

Giải



Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}: A \mapsto A'$, khi đó tứ giác ADCA' là hình bình hành và $\widehat{BAA'} = 60^0$.

Trong $\Delta ABA'$, ta có:

$\widehat{BAA'} = 60^0$,

$AA' = 2AB$.

Do đó, $\Delta ABA'$ vuông tại B và $\widehat{BA'A} = 30^0$, $A'B = 3$.

Vì $A'B = BC = 3$ nên $\Delta BCA'$ cân tại B, do đó:

$$\widehat{BCA'} = \widehat{BA'C} = \widehat{AA'C} - \widehat{BA'C} = 60^0 - 30^0 = 30^0.$$

$$\widehat{ABC} = 360^0 - (\widehat{BAD} + \widehat{CDA} + \widehat{BCD}) = 360^0 - (60^0 + 60^0 + 90^0) = 150^0.$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Xác định phép tịnh tiến biến ΔAB_1C_1 thành:

a. ΔB_1CA_1.

b. ΔC_1A_1B.

Bài tập 2: Tìm ảnh của đường thẳng (d) (cho trước) trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ ((d) không cùng phương với $\vec{v}$).

Bài tập 3: Từ đỉnh B của hình bình hành ABCD kẻ các đường cao BK và BH của nó. Biết rằng KH = a, BD = b. Tính khoảng cách từ B đến trực tâm E của ΔBHK theo a và b.

☐ $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$. ☐ $BE = \sqrt{a^2 - b^2}$. ☐ Khác.

Bài tập 4: Cho tứ giác ABCD, $AB = 6\sqrt{3}$, $CD = 12$, $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 120^0$, $\hat{D} = 90^0$. Tìm độ dài các cạnh BC và AD.

☐ $BC = 6$, $AD = 6\sqrt{3}$. ☐ $BC = 4$, $AD = 4\sqrt{3}$. ☐ Khác.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn bằng nhau (O_1,R) và (O_2,R) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng (d) vuông góc với AB và cắt (O_1,R) tại C và D, cắt (O_2,R) tại E và F với $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{EF}$.

a. Chứng minh độ lớn $\widehat{CAE}$ không phụ thuộc vào vị trí của (d).

b. Tính độ dài đoạn CE theo R và AB = a.

☐ $CE = \sqrt{R^2 - 4a^2}$. ☐ $CE = \sqrt{4R^2 - a^2}$. ☐ Khác.

Bài tập 6: Cho ΔABC nhọn và BC = a, CA = b, AB = c. Gọi H là giao điểm ba đường cao. CMR:

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}(a.AH + b.BH + c.CH)$$

Bài tập 7: Cho ΔABC, gọi I là trung điểm thuộc đoạn AC. Trên tia IB lấy một điểm B'. Dựng các hình bình hành BB'A'A, BB'C'C và AA_1C_1C sao cho A là trung điểm của $A'A_1$. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành AA_1C_1C bằng tổng diện tích các hình bình hành BB'A'A, BB'C'C.

Bài tập 8: Trong hình thang ABCD có BC//AD. Điểm M là giao điểm của các đường phân giác góc A và góc B; N là giao điểm của các đường phân giác góc C và D. Chứng minh rằng:

$$2MN = |AB + CD - BC - AD|$$

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2: Gọi M là một điểm tuỳ ý trên (d), M' là ảnh của $T_{\vec{v}}$, tức là:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

Ta tìm tập hợp các điểm M' khi M chạy trên (d).

Gọi A là điểm cố định trên (d), A' là ảnh của A qua $T_{\vec{v}}$. A' cũng là điểm cố định.

Vì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, nên $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ (AMM'A' là hình bình hành).

Suy ra: A'M'//AM

Do đó, điểm M' thuộc đường thẳng (d') qua A và song song với (d). Đường thẳng (d') này cố định.

Ngược lại, xét điểm N' tuỳ ý thuộc (d'). Gọi N là điểm trên (d) sao cho N'N//A'A. Suy ra ANN'A' là hình bình hành.

Do đó:

$$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$$, tức N' là ảnh của N qua $T_{\vec{v}}$.

Vậy ảnh của đường thẳng (d) qua $T_{\vec{v}}$ là đường thẳng (d').

Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến đường thẳng (d) thành đường thẳng (d') song song với (d).

Bài tập 3:

Ta có:

EH//KD (cùng ⊥BK)

EH//HD (cùng ⊥BH)

Do đó EHDK là hình bình hành.

Suy ra:

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{KD}$$

Thực hiện phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{KD}$, ta có:

$K \mapsto D$; $E \mapsto H$ và $B \mapsto P$

Suy ra:

- Tứ giác BPDK là hình chữ nhật ⇒ PK = BD = b
- PH//BE mà BE⊥HK nên PH⊥HK

Xét tam giác vuông PHK, ta có

$$PH = \sqrt{PK^2 - KH^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Mà BE = PH nên $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Bài tập 4: $BC = 6$, $AD = 6\sqrt{3}$.

Bài tập 5: $CE = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

BÀI TOÁN 2

TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại hai điểm, gọi A là một giao điểm. Đường thẳng (d) di động qua A và cắt hai đường tròn đã cho tại M và N. Trên hai tia AM và AN lấy hai điểm B và C sao cho:

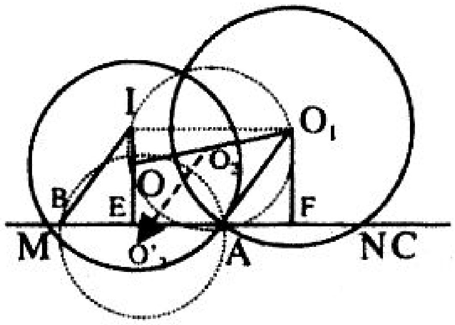
$$2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}.$$

Tìm quỹ tích các điểm B và C.

Giải

Dựng OE và O_1F vuông góc với (d).

Ta có E, F lần lượt là trung điểm các đoạn AM, AN và:



$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NA})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$$

Dựng O_1I vuông góc với OE, khi đó tứ giác O_1IEF là hình chữ nhật.

Từ đó suy ra:

$$\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow O_1ABI \text{ là hình bình hành}$$

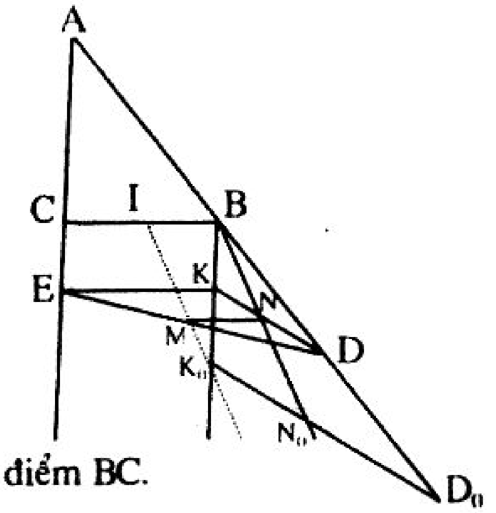
$$\Rightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O_1A} \ \Rightarrow B = T_{\overrightarrow{O_1A}}(I).$$

Vì $\widehat{O_1IO}$ vuông nên tập hợp các điểm I là đường tròn (O_2) đường kính OO_1, từ đó suy ra tập hợp các điểm B là đường tròn (O'_2) với $(O'_2) = T_{\overrightarrow{O_1A}}[(O_2)]$.

Tương tự ta có tập hợp điểm C là đường tròn (O'_3) với

$(O'_3) = T_{\overrightarrow{OA}}[(O_2)]$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là các tia đối của các tia BA, CA. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy. Tìm quỹ tích các trung điểm M của DE biết BD = 2CE.



Giải

Dựng hình bình hành BCEK, ta có K ở trên tia Bz cố định song song cùng chiều với tia Cy. Trên tia Bz lấy lần lượt hai điểm cố định D_0, K_0 sao cho $BD_0 = 2BK_0$.

Vì BD = 2CE = 2BK nên BK// D_0K_0. Gọi N và N_0 lần lượt là trung điểm của BD và D_0K_0 thì N_0 cố định và quỹ tích của N là tia BN_0.

Ta có:

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$$, với I là trung điểm BC.

Suy ra: $M = T_{\overrightarrow{BI}}(N)$.

Do đó quỹ tích của M là tia I_m là ảnh của tia BN_0 qua phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{BI}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC cân tại A cố định, đáy BC thuộc đường thẳng (d) cố định. Đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC có bán kính R không đổi.

a. Tìm quỹ tích các điểm A, C.

b. Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔABC.

Bài tập 2: Cho ΔABC, có A cố định, góc A không đổi và vectơ $\overrightarrow{BC}$ không đổi. Tìm quỹ tích các đỉnh B và C.

Bài tập 3: Cho ΔABC, có AB cố định. Đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC cố định. Gọi H là trực tâm ΔABC và P, Q là giao điểm của đường tròn tâm C bán kính CH với đường tròn tâm H bán kính HC. Tìm quỹ tích P và Q.

Bài tập 4: Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng cố định (d). Điểm A di động trên đường tròn. Tìm quỹ tích các đỉnh B, C của hình bình hành OABC sao cho AC song song với (d) và AC = a cho trước.

Bài tập 5: Cho hình bình hành ABCD có đường chéo BD cố định, A di động trên đường tròn tâm D bán kính R.

a. Tìm quỹ tích đỉnh C của hình bình hành ABCD.

b. Tìm quỹ tích đỉnh E của hình bình hành ADBE.

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD có B, D di động trên đường tròn tâm O, bán kính R = OA và BD = l không đổi.

a. Tìm quỹ tích trung điểm I của BD.

b. Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔABD.

Bài tập 7: Cho hình thang ABCD (AB//CD) có A, B cố định. Hai điểm C, D di động sao cho AD = a, CD = b (a,b > 0 cho trước). Tìm tập hợp điểm C.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O, R) cố định và một đường thẳng (d). Một đường tròn (γ) di động có bán kính r không đổi và luôn tiếp xúc ngoài với (O, R). Dựng hai tiếp tuyến của (γ) song song với (d), hai tiếp điểm M, M'. Tìm tập hợp các điểm M, M' khi (γ) di động.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O, R) đường kính AB cố định. Gọi MN là một đường kính di động. Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng AM, AN lần lượt tại P và Q. Tìm tập hợp các trực tâm của ΔMPQ và ΔNPQ.

BÀI TOÁN 3
DỰNG HÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta luôn thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tích.
Bước 2: Cách dựng.
Bước 3: Chứng minh.
Bước 4: Biện luận.

Chú ý: Để dựng một điểm, ta xem điểm đó là điểm chung của hai tập hợp điểm. Dựng hai tập hợp điểm này ta được điểm cần dựng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Dựng hình thang ABCD (AB//CD) biết hai đường chéo AC = a, BD = b, góc ABC = α và đường trung bình MN = c.

Giải

a. Phân tích

Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

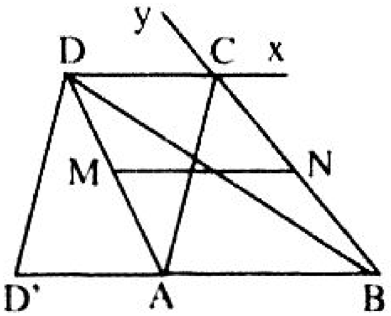
Thực hiện phép tịnh tiến

$T_{\overrightarrow{CA}}: D \mapsto D'$

khi đó tứ giác ACDD' là hình bình hành nên ta có:

BD' = BA + AD' = AB + DC = 2MN = 2c

⇒ ΔBDD' dựng được (biết 3 cạnh).



b. Cách dựng

- Dựng ΔBDD' với BD' = 2c, BD = b, DD' = a
- Dựng Dx//BD'
- Dựng By hợp với BD' góc α, By cắt Dx tại C.
- Dựng Cz//DD', Cz cắt BD" tại A

thì tứ giác ABCD là hình thang cần dựng.

c. Chứng minh

Theo cách dựng ta có:

- CD//AB nên ABCD là hình thang; BD = b, góc ABC = α
- AC = DD' = a (do ACDD' là hình bình hành) và

$$MN = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}(AB + AD') = \frac{1}{2}BD' = c$$

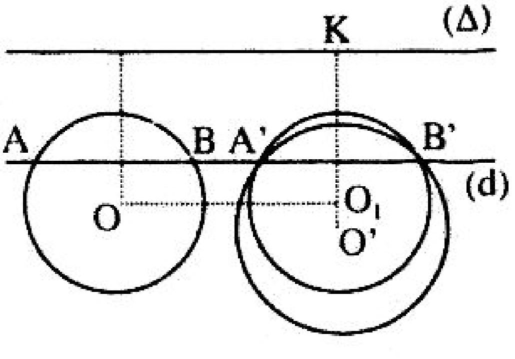
d. Biện luận

Bài toán có nghiệm hình ⇔ ΔBDD' dựng được ⇔ |a − b| < 2c < a + b.

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (O,R) và (O', R'), $R \neq R'$ và một đường thẳng (Δ). Hãy dựng một đường thẳng (d) song song với (Δ) cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm A, B, A', B' sao cho: AB = A'B'.

Giải

a. Phân tích



Giả sử đã dựng được đường thẳng (d) song song với (Δ), cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm A, B, A', B' sao cho AB = A'B'.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Thực hiện phép tịnh tiến vectơ $\overline{AA'}$ thì (O, R) có ảnh là (O_1, R) đi qua A' và B' với I là giao điểm của đường thẳng Ox//(Δ).

b. Cách dựng

- Dựng Ox//(Δ).
- Dựng O'K$\perp$(Δ), O'K cắt Ox tại I.
- Dựng (O_1, R) và (O_1, R) cắt (O', R') tại A' và B'

thì đường thẳng A'B' là đường thẳng (d) phải dựng.

c. Chứng minh

Vì:

- (d)$\perp$O'K nên (d)//(Δ).
- (d) cắt (O_1, R) tại A', B' nên (d) cắt (O, R) tại A, B và AB = A'B'.

d. Biện luận

Bài toán có nghiệm hình $\Leftrightarrow$ hai đường tròn (I,R) và (O',R') cắt nhau. Khi đó bài toán chỉ có một nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC. Hãy dựng đường thẳng (d) song song với BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N sao cho AM = CN.

Bài tập 2: Dựng hình bình hành ABCD, biết AB = a còn C, D thuộc hai đường tròn (d_1) và (d_2).

Bài tập 3: Dựng tứ giác ABCD biết: AB = a, BC = b, CD = c, AD = d và góc nhọn của AB, CD là α.

Bài tập 4: Cho hai đường tròn (O), (O_1) và vectơ $\vec{a}$. Dựng đoạn thẳng PQ trong đó $P \in (O)$, $Q \in (O_1)$ và $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$.

Bài tập 5: Hãy dựng một đường tròn có bán kính R qua một điểm A và chắn trên một đường thẳng (d) một dây cung có độ dài l cho trước.

Bài tập 6: Trên đường tròn (O) cho hai dây cung AB và CD không cắt nhau. Hãy dựng điểm M trên (O) sao cho hai dây cung MA và MB chắn trên dây CD đoạn EF có độ dài a cho trước (a nhỏ hơn độ dài dây CD).

BÀI TOÁN 4

HỆ TOẠ ĐỘ ĐỐI VỚI PHÉP TỊNH TIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Xác định điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(x_0, y_0)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a, b)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử $M_1(x, y)$, ta có:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = a \\ y - y_0 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + x_0 \\ y = b + y_0 \end{cases}.$$

Bài toán 2: Tìm phương trình của hình biến (H_1) của hình (H): $f(x, y) = 0$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a, b)$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Mỗi điểm $M(x, y) \in (H_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (H)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a, b)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (H) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ x - x_0 = a \\ y - y_0 = b \end{cases} \Rightarrow f(x - a, y - b) = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (H_1).

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm toạ độ của điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(1, -3)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1, 2)$.

Giải

Giả sử $M_1(x, y)$, ta có:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy $M_1(2, -1)$.

Ví dụ 2: Tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d): $x + 3y - 2 = 0$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1, 1)$.

Giải

Mỗi điểm $M(x, y) \in (d_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1, 1)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3y_0 - 2 = 0 \\ x - x_0 = 1 \\ y - y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 1) + 3(y - 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (d_1).

Ví dụ 3: Tìm phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(2, 1)$.

Giải

Mỗi điểm $M(x, y) \in (C_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(2, 1)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (C) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 + 2)^2 + (y_0 - 1)^2 = 4 \\ x - x_0 = 2 \\ y - y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 2 + 2)^2 + (y - 1 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (C_1).

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm toạ độ của điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(3, 2)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(-4, 1)$.

Bài tập 2: Tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, biết:

a. (d): $x + 2y - 13 = 0$ và $\vec{v}(1, 1)$.

b. (d): $2x - y - 1 = 0$ và $\vec{v}(2, -1)$.

Bài tập 3: Tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, biết:

a. (d): $x - 3y + 3 = 0$ và $\vec{v}(-3, -2)$.

b. (d): $2x - 6y + 3 = 0$ và $\vec{v}(\frac{1}{2}, -3)$.

Bài tập 4: Tìm phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, biết:

a. (C): $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ và $\vec{v}(-2,1)$.

b. (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$ và $\vec{v}(0, 3)$.

CHỦ ĐỀ 4

PHÉP QUAY

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho một điểm O, góc α là góc cho trước.

Phép quay tâm O, góc quay α là một phép biến hình trên $\mathcal{P}$ biến điểm M thành điểm M_1 sao cho:

- $OM = OM_1$
- $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = \alpha$.

Kí hiệu: Q_O^α hay R_O^α.

Nhận xét:

- Nếu $M_1 = Q_O^\alpha(M)$ thì $M = Q_O^{-\alpha}(M_1)$.
- Phép quay tâm O, góc quay $\alpha = \pm 180^0$ là phép đối xứng tâm O.

2. TÍNH CHẤT

Phép quay là một phép dời hình.

Hệ quả: Phép quay Q_O^α bảo toàn:

- Khoảng cách giữa hai điểm.
- Tính thẳng hàng của các điểm, hơn nữa nếu điểm B ở giữa hai điểm A và C thì điểm $B_1 = Q_O^\alpha(B)$ cũng ở giữa hai điểm $A_1 = Q_O^\alpha(A)$ và $C_1 = Q_O^\alpha(C)$
- Số đo của một góc.

3. ẢNH CỦA MỘT SỐ HÌNH QUA PHÉP QUAY Q_O^α

- Ảnh của một đoạn thẳng AB là đoạn thẳng A'B' = AB.
- Ảnh của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ sao cho: $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{AB}|$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \alpha$.
- Ảnh của một đường thẳng là một đường thẳng.
- Ảnh của một tia là một tia.
- Ảnh của một đường tròn là một đường tròn bằng nó.

Nhận xét quan trọng: Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A_1B_1}$ có $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{AB}|$ thì tồn tại một phép quay tâm O, góc quay α biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{A_1B_1}$, được xác định như sau:

- $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1})$.
- Tâm O là giao điểm của hai trong bốn đường sau:
  1. Đường trung trực của đoạn AA_1.
  2. Đường trung trực của đoạn BB_1.
  3. Cung chứa góc $|\alpha|$ giới hạn bởi hai điểm A, A_1.
  4. Cung chứa góc $|\alpha|$ giới hạn bởi hai điểm B, B_1.

Nếu hai đường tròn AB và A_1B_1 cắt nhau tại I thì tứ giác $IOAA_1$ và tứ giác $IOBB_1$ nội tiếp đường tròn.

BÀI TOÁN 1

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh (H_1) là ảnh của (H_2) qua phép quay tâm O, góc quay α, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tùy ý thuộc (H_1), ta đi chứng minh $M_2 = Q_O^\alpha(M_1) \in (H_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tùy ý thuộc (H_2), ta đi chứng minh $M_1 = Q_O^\alpha(M_2) \in (H_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép quay để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép quay để giải các yêu cầu bài toán.

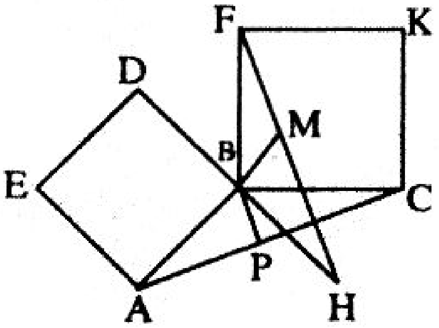
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC có các đỉnh được kí hiệu theo hướng âm, dựng ở ngoài tam giác ấy hai hình vuông ABDE và BCKF. Gọi P là trung điểm cạnh AC, H là điểm đối xứng của D qua B, M là trung điểm đoạn FH.

a. Xác định ảnh của hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BP}$ trong phép quay tâm B, góc 90^0.

b. CMR $DF = 2BP$ và $DF \perp BP$.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} BA = BH \text{ (cùng bằng BD)} \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}) = 90^0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_B^{90^0}(A) = H \text{ và } Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BH}$$

Vì $Q_B^{90^0}(A) = H$, $Q_B^{90^0}(C) = F$ nên $Q_B^{90^0}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HF}$

b. Vì P là trung điểm của AC nên theo tính chất của phép quay ta có ảnh của P qua phép quay trên trung điểm M của HF.

Do đó:

$$Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases} BP = BM \\ BP \perp BM \end{cases}.$$

Mặt khác:

$$BM = \frac{1}{2}DE \text{ và } BM//DF.$$

Do đó $BP = \frac{1}{2}DF$ và $DF \perp BP$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ta dựng các hình vuông ABDE và ACFH. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AE và CD. CMR ΔBIJ là một tam giác đều.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC; P và Q là hai điểm di động lần lượt ở trên cạnh AB và AC sao cho AP = CQ.

a. Xác định tâm và góc của phép quay biến $\overrightarrow{AP}$ thành $\overrightarrow{CQ}$.

b. Chứng minh rằng đường tròn (APQ) qua một điểm cố định khác A.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC và I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{IA}.\sin A + \overrightarrow{IB}.\sin B + \overrightarrow{IC}.\sin C = \vec{0}$$

Bài tập 4: Đường thẳng qua điểm K lấy trong hình vuông ABCD cắt các cạnh AB, CD lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của đường tròn qua K, P, B với đường tròn qua K, Q, D nằm trên đường chéo BD.

Bài tập 5: Cho đoạn thẳng AC và một điểm B ở trong đoạn đó. Dựng về cùng một phía của đường thẳng AC hai tam giác đều ABE và CBF. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AF và CE. Chứng minh rằng BMN là tam giác đều.

Bài tập 6: Cho hai đường tròn (O_1,R) và (O_2, R); M là điểm di động trên (O_1,R), N là điểm di động trên (O_2,R) sao cho $(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_2N})$ có số đo không đổi. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn MN luôn qua một điểm cố định.

Bài tập 7: Cho tam giác ABC, dựng ở phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABC_1, ACB_1, BCA_1. CMR:

a. $AA_1 = BB_1 = CC_1$

b. AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm O.

c. Đối với tam giác nhọn ABC, điểm O nằm trong tam giác và $OA_1 = OB + OC$.

Bài tập 8: Cho tam giác ABC, dựng ở ngoài tam giác ấy các tam giác vuông cân IAB, KAC ($\hat{I} = \hat{K} = 90^0$), dựng hình bình hành IBCM. Trên tia đối của tia AI lấy điểm N sao cho AN = AI. CMR: tam giác KMN vuông cân.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 4: - *Đề nghị bạn đọc vẽ hình*

Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn (KPB) với BC và N là giao điểm thứ hai của đường tròn (KQD) với AD.

Vì $\widehat{PBM} = 1v$ nên PM là đường kính của (KPB), suy ra $\widehat{MKP} = 1v$.

Tương tự QN là đường kính của (KQD) nên $\widehat{NKP} = 1v$.

$\widehat{MKP} + \widehat{NKP} = 2v$ nên ba điểm M, K, N thẳng hàng và $MN \perp PQ$ (1)

Ta chứng minh MN = PQ

Dựng $NE \perp BC$ tại E, $QF \perp AB$ tại F.

Hai tam giác vuông MEN và PFQ có:

NE = QF

$\widehat{MNE} = \widehat{PQF}$

Suy ra MN = PQ.

Xét một phép quay tâm I, góc 90° biến điểm P thành điểm M.

Khi đó, do

$MN \perp PQ$ và MN = PQ,

nên $Q \mapsto N$ qua phép quay $Q_I^{90^0}$

Từ đó suy ra:

$\widehat{MIP} = \widehat{NIQ} = 1v$.

Do đó I chính là giao điểm thứ hai của (KPB) với (KQD).

Lại có:

$Q_I^{90^0} = M$ và $PA \perp MC$

suy ra $PA = Q_I^{90^0}(MC)$

Vậy I cách đều PA và MC, và I thuộc đường chéo BD của ABCD.

BÀI TOÁN 2

TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép quay Q_O^{α}, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép quay Q_O^{α}.

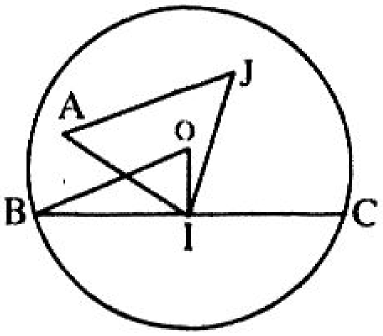
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O, R), A là một điểm cố định không trùng với tâm O, BC là một dây cung của (O), BC di động nhưng số đo của cung BC luôn bằng 120^0. Gọi I là trung điểm của BC, vẽ tam giác đều AIJ. Tìm tập hợp điểm J.

Giải

Ta có I là trung điểm của BC và cung BC = 120^0

nên $OI \perp BC$ và $\widehat{BOI} = 60^0$.



Trong ΔOIB:

$$OI = OB\cos\widehat{BOI} = R\cos 60^0 = \frac{R}{2}$$

Do đó tập hợp các điểm I là đường tròn (γ) tâm O bán kính $\frac{R}{2}$.

Mặt khác, ΔAIJ đều nên ta có:

$$\begin{cases} AJ = AI \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) = 60^0 \end{cases} \Rightarrow J = Q_A^{60^0}\,[(\gamma)]$$

Mà tập hợp các điểm I là đường tròn (γ) nên tập hợp các điểm J là hai đường tròn (γ_1) và (γ_2) với

$(\gamma_1) = Q_A^{60^0}\,[(\gamma)]$

$(\gamma_2) = Q_A^{60^0}\,[(\gamma)]$

(γ_1) là đường tròn tâm (O_1), bán kính $\frac{R}{2}$ với $O_1 = Q_A^{60^0}\,(O)$.

(γ_2) là đường tròn tâm (O_2), bán kính $\frac{R}{2}$ với $O_2 = Q_A^{-60^0}\,(O)$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho điểm O và đường thẳng a không đi qua O. Tìm tập hợp các đỉnh B của tam giác đều OAB, trong đó $A \in a$.

Bài tập 2: Cho đường thẳng (Δ) và một điểm A cố định không ở trên (Δ). M là một điểm di động trên (Δ). Vẽ tam giác AMN vuông cân tại A. Tìm tập hợp điểm N.

Bài tập 3: Trên đường tròn (O), cho hai điểm A và B cố định. Gọi M là một điểm di động trên cung lớn AB. Trên tia BM, lấy điểm N sao cho BN = AM.

a. Gọi I là trung điểm của cung lớn AB. CMR: IM = IN.

b. CMR: điểm N là ảnh của điểm M trong một phép quay xác định. Tìm tập hợp các điểm N khi M di động trên cung lớn AB.

Bài tập 4: Cho hai trục vuông góc Ox và Oy và một độ dài a. Trên Ox lấy một điểm cố định A và một điểm di động M, trên Oy lấy một điểm cố định B và một điểm di động N sao cho:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = a \text{ và } \overline{OM} + \overline{ON} = 2a$$

a. Chứng minh AM = BN

b. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn MN qua một điểm cố định E. Tam giác EMN có đặc tính gì?

c. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

BÀI TOÁN 3

DỰNG HÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta luôn thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tích.
Bước 2: Cách dựng.
Bước 3: Chứng minh.
Bước 4: Biện luận.

Chú ý: Để dựng một điểm, ta xem điểm đó là điểm chung của hai tập hợp điểm. Dựng hai tập hợp điểm này ta được điểm cần dựng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng (d) và (d') song song và một điểm A không ở trên (d) và (d'). Hãy dựng điểm B trên (d) và điểm C trên (d') sao cho ABC là tam giác đều, có các đỉnh được kí hiệu theo hướng dương.

Giải

a. Phân tích

Giả sử đã dựng được tam giác đều ABC theo hướng dương. Thực hiện phép quay tâm A, góc 60^0.

$$Q_A^{60^0}: B \mapsto C$$

$$(d) \mapsto (d_1)$$

Vì $B \in (d)$ nên $C \in (d_1)$.

Vậy C là điểm chung của (d_1) và (d'). Ta cũng có $B = Q_A^{-60^0}(C)$.

b. Cách dựng

- Dựng đường thẳng (d_1) với $(d_1) = Q_A^{60^0}$ thì (d_1) là đường thẳng qua K và vuông góc với AK.
- (d_1) cắt (d') tại C
- Dựng điểm B với $B = Q_A^{-60^0}(C)$. Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

c. Chứng minh

Theo cách dựng ta có:

- $B \in (d)$, $C \in (d')$
- $AC = AB$ và $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -60^0 \Rightarrow$ ABC là tam giác đều và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^0$.

d. Biện luận

Vì (d)//(d') nên ta luôn có một và chỉ một điểm chung C của (d_1) và (d'). Do đó bài toán có một nghiệm hình.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Dựng ΔABC vuông cân ($\bar{A} = 1v$) cho trước đỉnh A còn hai đỉnh B, C theo thứ tự ở trên:

a. Hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước.

b. Hai đường tròn (O_1), (O_2) cho trước.

Bài tập 2: Cho ΔABC có ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) = 60^0. Hãy dựng điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho BM = CN và BC = 2MN.

Bài tập 3: Dựng tam giác đều biết ba đỉnh nằm trên bốn cạnh của một hình bình hành cho trước.

Bài tập 4: Cho ΔABC có các góc đều nhọn. Hãy dựng một điểm M sao cho tổng khoảng cách MA + MB + MC là nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 5

PHÉP VỊ TỰ

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho một điểm O và một số thực $k \neq 0$. Phép vị tự tâm O, tỉ số k là phép biến hình trên $\mathscr{P}$ biến điểm M thành điểm M_1 sao cho: $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$.

Ký hiệu VT_O^k

Vậy

$$M_1 = VT_O^k(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$$

Ghi chú:

- Ba điểm O, M, M' thẳng hàng.
- Khi $k > 0$: M và M_1 ở cùng bên đối với O. Ta có phép vị tự thuận.
- Khi $k < 0$: M và M_1 ở hai bên đối với O. Ta có phép vị tự nghịch.
- Khi $k = 1$: phép vị tự là phép đồng nhất (VT_O^1 (M) $\forall M \in \mathscr{P}$).
- Khi $k = -1$: phép vị tự là phép đối xứng tâm O.

2. TÍNH CHẤT

Phép vị tự bảo toàn:

- Tính thẳng hàng của các điểm và nếu điểm B ở giữa hai điểm A và C thì điểm $B_1 = VT_O^k(B)$ cũng ở giữa hai điểm $A_1 = VT_O^k(A)$ và $C_1 = VT_O^k(C)$.
- Số đo của một góc.

3. ẢNH CỦA MỘT SỐ HÌNH QUA PHÉP VỊ TỰ VT_O^k

- Ảnh của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ ảnh của một đường thẳng (d) là đường thẳng (d') cùng phương với (d).
- Ảnh của tia Ax là tia A'x' cùng phương với Ax. Hai tia này cùng hướng khi $k > 0$, ngược hướng khi $k < 0$.
- Ảnh của một đường tròn (I,R) là đường tròn (I',R') với $I' = VT_O^k(I)$; $R' = |k|R$.

Ghi chú: Cho hai đường tròn (I_1,R_1) và (I_2,R_2) với $R_1 \neq R_2$. Có hai phép vị tự $VT_{O_1}^k$ và $VT_{O_2}^k$ biến (I_1,R_1) thành (I_2,R_2).

Hai tâm vị tự O_1, O_2 và tỉ số k được xác định như sau:

- $k = \dfrac{R_1}{R_2}$
- O_1, O_2 ở trên đường thẳng I_1I_2 và $\dfrac{\overrightarrow{O_1I_2}}{\overrightarrow{O_1I_1}} = \dfrac{\overrightarrow{O_2I_2}}{\overrightarrow{O_2I_1}} = k$

BÀI TOÁN 1

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh (H_1) là ảnh của (H_2) qua phép vị tự VT_O^k, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tùy ý thuộc (H_1), ta đi chứng minh $M_2 = VT_O^k(M_1) \in (H_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tùy ý thuộc (H_2), ta đi chứng minh $M_1 = VT_O^k(M_2) \in (H_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép vị tự để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép vị tự để giải các yêu cầu bài toán.

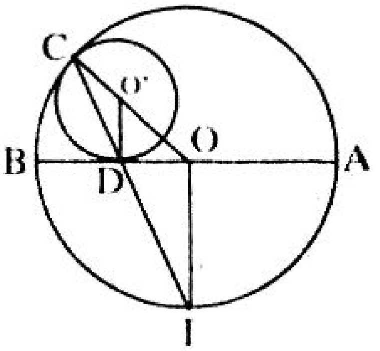
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O,R) đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với (O) và đoạn AB lần lượt tại C, D, đường thẳng CD cắt (O,R) tại I. Chứng minh cung AI = BI.

Giải

Ta có:

- C là tâm vị tự dương của hai đường tròn (O) và (O').
- $D \in (O')$, $I \in (O)$ và ba điểm C, D, I thẳng hàng.



Do đó thực hiện phép vị tự tâm C, tỉ số $\frac{R'}{R}$ (R' là bán kính của (O')), ta có:

$$H_C^{\frac{R'}{R}} : O \mapsto O',\ I \mapsto D$$

$\Rightarrow OI // O'D \Rightarrow OI \perp AB$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của cung AB $\Rightarrow$ cung AI = BI.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình thang ABCD có các đáy CD = 3AB. Hãy xác định phép vị tự biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

Bài tập 2: Cho hai đường tròn (O) và (O_1) có bán kính lần lượt là R và 3R tiếp xúc trong với nhau tại A. Nếu (O) biến thành (O_1) trong phép vị tự tâm A thì tỉ số vị tự là bao nhiêu?

Bài tập 3: Cho đường tròn (O) và một điểm I ở ngoài đường tròn (O). Gọi (O') là ảnh của (O) trong $\mathcal{H}(I,k)$, $k \neq 1$. Chứng minh rằng I là giao điểm các tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

Bài tập 4: Cho hai điểm B, C cố định thuộc đường tròn (O,R) và điểm A chạy trên đường tròn này. CMR: trọng tâm G của ΔABC nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn này.

Bài tập 5: Trên cạnh BC của ΔABC, lấy hai điểm M, N sao cho BM = CN. Qua M và N lần lượt vẽ các đường thẳng song song với AB, AC. Chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này nằm trên trung tuyến qua A của ΔABC.

Bài tập 6: Cho ΔABC và một đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng các đường tròn (AMN) và (ABC) tiếp xúc nhau.

Bài tập 7: Cho ΔABC có A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Gọi A'x, B'y, C'z theo thứ tự là các đường thẳng song song với các đường phân giác trong của các góc A, B, C trong tam giác ABC. Chứng minh rằng A'x, B'y, C'z đồng quy.

Bài tập 8: Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đôi một tiếp xúc ngoài tại A, B, C. Dây AC kéo dài của (O_1) gặp (O_3) tại A_1. Vẽ đường kính A_1A_2 của (O_3). Chứng minh rằng A, B, A_2 thẳng hàng.

Bài tập 9: Cho tứ giác ABCD có I và J lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối AB và CD. Gọi M, N là trung điểm của các đường chéo của tứ giác AIJD; P, Q là trung điểm các đường chéo của tứ giác BIJC. Chứng minh rằng: hoặc 4 điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng hoặc chúng tạo thành một hình bình hành.

Bài tập 10: M, N, P là trung điểm ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC; H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, I là tâm đường tròn (MNP).

a. Chứng minh tam giác MNP là ảnh của tam giác ABC trong phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra 4 điểm O, G, I, H thẳng hàng và I là trung điểm đoạn OH.

b. Chứng minh rằng phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến đường tròn (ABC) thành đường tròn (MNP). Từ đó suy ra, trong một tam giác, trung điểm 3 cạnh, chân 3 đường cao và trung điểm các đoạn nối trực tâm với 3 đỉnh là 9 điểm cùng ở trên một đường tròn.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 10: - *Đề nghị bạn đọc tự vẽ hình.*

a. $H_G^{-1/2}[ABC] = MNP$

Ta có:

$$\frac{\overrightarrow{GM}}{\overrightarrow{GA}} = \frac{\overrightarrow{GN}}{\overrightarrow{GB}} = \frac{\overrightarrow{GP}}{\overrightarrow{GC}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H_G^{-1/2}: A \mapsto M,\ B \mapsto N,\ C \mapsto P$$

$$\Rightarrow H_G^{-1/2}: ABC \mapsto MNP$$

- O, G, I, H thẳng hàng:

Vì O là tâm đường tròn (ABC), I là tâm đường tròn (MNP) và

$$H_G^{-1/2}: ABC \mapsto MNP$$

nên $H_G^{-1/2}: O \mapsto I$.

Suy ra O, G, I thẳng hàng.

$$\left.\begin{array}{l} PN // BC \\ OM \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow OM \perp PN \Rightarrow \text{O là trực tâm của tam giác MNP}$$

Tương tự ON⊥PM

Mà H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$H_G^{-1/2}: H \mapsto O$$

do đó O, G, H thẳng hàng.

- I là trung điểm đoạn OH

Ta có:

$$H_G^{-1/2}: O \mapsto I,\ H \mapsto O$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OH} \text{ và } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}.$$

suy ra I là trung điểm đoạn OH.

b. Vì

$$H_G^{-1/2}: (ABC) \mapsto (MNP)$$

nên G là tâm vị tự âm của hai đường tròn (ABC) và (MNP).

Hệ thức $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$, ta đi chứng minh H là tâm vị tự dương của (ABC) và (MNP).

Gọi E, F, K là trung điểm của đoạn HA, HB, HC và H_1, H_2, H_3 là các điểm đối xứng của H qua 3 cạnh của tam giác ABC, khi đó H_1, H_2, H_3 ở trên (ABC).

Ta có phép vị tự $H_H^{1/2}$ biến:

A, B, C ∈ (ABC) thành E, F, K ∈ (MNP)

H_1, H_2, H_3 ∈ (ABC) thành A', B', C' ∈ (MNP)

(A', B', C' là chân đường cao của tam giác ABC)

Vậy 9 điểm M, N, P, E, F, K, A', B', C' cùng ở trên một đường tròn.

BÀI TOÁN 2

TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép vị tự VT_O^k, biến điểm E di động thành điểm M .

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép vị tự VT_O^k.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho điểm A và đường thẳng d cố định. M là điểm di động trên d, tìm tập hợp trung điểm của đoạn AM.

Giải

Gọi P là trung điểm của đoạn AM, ta có $M \overset{H(A,\frac{1}{2})}{\mapsto} P$

Tập hợp các điểm M là đường thẳng d. Vậy tập hợp các điểm P là đường thẳng d' ảnh của d trong $\mathcal{H}(A, \frac{1}{2})$.

Ví dụ 2: Trên đường tròn (C) tâm O bán kính R, cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABM.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $M \overset{H(I,\frac{1}{3})}{\mapsto} G$.

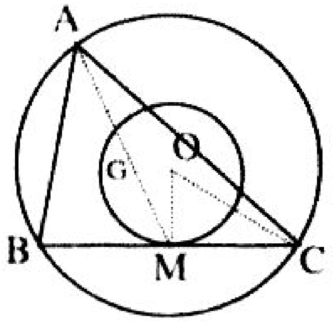
Suy ra tập hợp các điểm G là ảnh (C') của (C) trong $\mathcal{H}(I, \frac{1}{3})$.

Dựng (C'):

- Dựng O' sao cho $3\overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{IO}$
- (C') là đường tròn tâm O' bán kính R/3.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O, R) và một điểm A cố định ở trên đường tròn; BC là một dây cung di động của đường tròn này và BC có độ dài không đổi bằng 2d (d < R). Tìm tập hợp tròn tâm G của Δ ABC.

Giải



Gọi M là trung điểm cạnh BC thì OM⊥BC

Trong ΔOMC ta có:

$$OM^2 = OC^2 - MC^2 = R^2 - d^2$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (γ) tâm O bán kính $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Vì $\dfrac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{2}{3}$ nên $H_A^{2/3}(M)=G$

Suy ra tập hợp các điểm G là đường tròn (γ') với (γ')= $H_A^{2/3}[(\gamma')]$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) và một điểm P cố định. Một cát tuyến di động qua P cắt (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các trung điểm của IP.

Bài tập 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A. Đường kính vẽ từ A gặp (O) tại B và (O') tại C. Một đường thẳng di động qua A gặp (O) tại M và (O') tại N. Tìm tập giao điểm I của BN và CM.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O, R) và một điểm I cố định với OI = 2R; M là điểm di động trên (O). Phân giác của góc IOM cắt IM tại M_1. Tìm tập hợp các điểm M_1.

Bài tập 4: Cho tứ giác ABCD có A, B, C cố định và D di động sao cho AD = l (l > 0).

a. Tìm tập hợp trung điểm I của đường chéo BD.

b. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn nối trung điểm hai đường chéo AC và BD.

Bài tập 5: Cho hình thang ABCD (AB//CD) có A, B cố định, C, D di động sao cho AD = a, CD = b (a, b là hằng số dương). Đặt AB = d, các đường chéo cắt nhau tại I.

a. Tìm tập hợp các điểm C.

b. Tìm tập hợp các điểm I.

Bài tập 6: Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ A kẻ một tiếp tuyến AB của một đường tròn (B là tiếp điểm) và một cát tuyến di động AMN. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác BMN.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 2: - *Để nghị bạn đọc tự vẽ hình.*

Vì BM//CN nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{IC}{IM} = \dfrac{CN}{BM} \\ \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CN}{BM} \end{cases} \Rightarrow \frac{IC}{IM} = \frac{AC}{AB} = \frac{2R'}{2R} = \frac{R'}{R}$$

trong đó R, R' lần lượt là bán kính của (O) và (O').

Suy ra:

$$\frac{IC}{CM} = \frac{R'}{R+R'} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{IC}}{\overrightarrow{CM}} = \frac{R'}{R+R'} \Rightarrow H_C^{\frac{R'}{R+R'}} : M \mapsto I$$

Vì tập hợp các điểm M là đường tròn (O) nên tập hợp các điểm I là đường tròn (γ) với (γ) = $H_C^{\frac{R'}{R+R'}}[(O')]$.

BÀI TOÁN 3
DỰNG HÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta luôn thực hiện theo các bước:

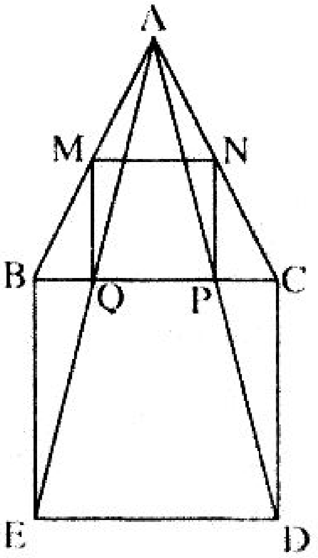
Bước 1: Phân tích.
Bước 2: Cách dựng.
Bước 3: Chứng minh.
Bước 4: Biện luận.

Chú ý: Để dựng một điểm, ta xem điểm đó là điểm chung của hai tập hợp điểm. Dựng hai tập hợp điểm này ta được điểm cần dựng.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Dựng hình vuông nội tiếp trong một tam giác cho trước (hình vuông nội tiếp tam giác là hình vuông có hai đỉnh ở trên một cạnh, hai đỉnh còn lại ở trên hai cạnh còn lại của tam giác).

Giải



a. Phân tích

Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC cho trước. Gọi $k = \frac{MN}{BC}$. Thực hiện phép vị tự tâm A, tỉ số k thì hình vuông MNPQ sẽ biến thành hình vuông BCDE. Suy ra A, P, D thẳng hàng và A, Q, E thẳng hàng.

b. Cách dựng

- Dựng hình vuông BCDE sao cho BCDE và ABC nằm ở hai bên của đường thẳng BC.
- AD cắt cạnh BC tại P.
- AE cắt cạnh BC tại Q.
- Dựng đường thẳng qua P, song song với BC cắt cạnh AC tại N.
- Dựng đường thẳng qua N, song song với BC cắt cạnh AB tại M.

Khi đó MNPQ là hình vuông phải dựng.

c. Chứng minh

- Theo cách dựng ta có tứ giác MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC.
- Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AE}} = k$$

do đó H_A^k : MNPQ ↦ BCDE mà BCDE là hình vuông nên MNPQ là hình vuông.

d. Biện luận

Ta luôn chỉ có một hình vuông BCDE ở khác phía của tam giác ABC đối với đường thẳng BC nên luôn có chỉ một điểm P và chỉ một điểm Q ở trên cạnh BC.

Vậy bài toán có một và chỉ một nghiệm hình.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC và một điểm O. Dựng ảnh của ΔABC qua phép vị tự tâm O với tỉ số:

a. $k = 1$.

b. $k = 2$.

c. $k = -1$.

Bài tập 2: Dựng đường tròn qua điểm A cho trước, tiếp xúc với hai đường thẳng Ox và Oy cho trước. (Điểm A không ở trên Ox hay Oy).

Bài tập 3: Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Hãy dựng một đường tròn đi qua A và tiếp xúc với hai tia Ox và Oy.

Bài tập 4: Dựng tam giác ABC biết $\widehat{A} = \alpha$ và độ dài trung tuyến: $BM = m$, $CN = n$.

Bài tập 5: Dựng tam giác ABC biết $\hat{A} = \alpha$, $\frac{AB}{AC} = k$ và độ dài trung tuyến $AM = m$ (α, k, m cho trước).

Bài tập 6: Dựng đường tròn (O) qua A cho trước và tiếp xúc với hai đường thẳng cắt nhau (d_1), (d_2) cho trước.

Bài tập 7: Cho hai đường tròn cắt nhau (O) và (O'). Gọi A là một giao điểm. Hãy dựng một đường thẳng qua A cắt (O) tại M và (O') tại N sao cho $AM = 2AN$.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O) và đường thẳng (d) không có điểm chung với (O), A là một điểm trên (d). Hãy dựng đường tròn (γ) tiếp xúc với (O) và tiếp xúc với (d) tại A.

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG ... 3

CHƯƠNG I. VECTƠ

Chủ đề 1: Vectơ - Các phép toán vectơ ... 5
Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức vectơ ... 7
Bài toán 2: Biểu diễn vectơ ... 11
Bài toán 3: Xác định điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ ... 15
Bài toán 4: Quỹ tích điểm ... 20
Bài toán 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau ... 23
Bài toán 6: Chứng minh ba điểm thẳng hàng ... 25
Bài toán 7: Chứng minh đường thẳng đi qua một điểm cố định ... 30
Bài toán 8: Nhận dạng Đẳng thức và bất đẳng thức vectơ ... 32
Bài toán 9: Đẳng thức và bất đẳng thức vectơ ... 35
Chủ đề 2: Toạ độ của điểm trên trục ... 37
Bài toán: Xác định toạ độ của một điểm thoả mãn điều kiện cho trước ... 37
Chủ đề 3: Hệ toạ độ Đềcác vuông góc ... 39
Bài toán 1: Toạ độ vectơ - toạ độ của điểm ... 40
Bài toán 2: Biểu diễn vectơ ... 42
Bài toán 3: Xác định điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ, độ dài ... 44
Bài toán 4: Vectơ cùng phương - Ba điểm thẳng hàng - Định lý Menelaus ... 49
Bài toán 5: Điểm chia đoạn thẳng ... 55
Bài toán 6: Hàng điểm điều hoà ... 61
Bài toán 7: Phương pháp toạ độ hoá ... 64

CHƯƠNG II. HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Chủ đề 1: Tỷ số lượng giác của góc bất kỳ ... 70
Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa các cung đặc biệt ... 72
Bài toán 2: So sánh giá trị của các hàm số lượng giác ... 74
Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác ... 77
Bài toán 4: Tính giá trị của hàm số lượng giác - Biểu thức lượng giác ... 82
Bài toán 5: Chứng minh đẳng thức lượng giác ... 93
Bài toán 6: Hàm lượng giác của hai góc phụ, bù nhau ... 97
Chủ đề 2: Tích vô hướng của hai vectơ ... 104
Bài toán 1: Tính tích vô hướng của hai vectơ ... 105
Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hay về độ dài ... 111
Bài toán 3: Chứng minh tính vuông góc - Thiết lập điều kiện vuông góc ... 114
Bài toán 4: Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán định lượng, định tính ... 119
Bài toán 5: Điểm thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng hay về độ dài ... 124
Bài toán 6: Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán cực trị ... 131
Bài toán 7: Sử dụng tích vô hướng chứng minh bất đẳng thức ... 133
Bài toán 8: Biểu thức toạ độ của tích vô hướng ... 135
Chủ đề 3: Hệ thức lượng trong tam giác ... 143
Bài toán 1: Định lý cosin trong tam giác ... 145
Bài toán 2: Định lý sin trong tam giác ... 150
Bài toán 3: Đường trung tuyến trong tam giác ... 155

Bài toán 4: Đường cao trong tam giác ... 160
Bài toán 5: Đường phân giác trong tam giác ... 163
Bài toán 6: Đường tròn ngoại tiếp tam giác ... 167
Bài toán 7: Đường tròn nội tiếp tam giác ... 170
Bài toán 8: Chu vi tam giác ... 174
Bài toán 9: Diện tích tam giác - Tỷ số diện tích ... 178
Bài toán 10: Hệ thức lượng trong tam giác thường ... 185
Bài toán 11: Hệ thức lượng trong tam giác vuông ... 190
Bài toán 12: Hệ thức lượng trong tam giác cân ... 195
Bài toán 13: Hệ thức lượng trong tam giác đều ... 198
Bài toán 14: Hệ thức lượng trong tứ giác ... 201
Chủ đề 4: Hệ thức lượng trong đường tròn ... 204
Bài toán 1: Tính phương tích của một điểm đối với một đường tròn ... 206
Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức phương tích ... 210
Bài toán 3: Tứ giác nội tiếp đường tròn ... 214
Bài toán 4: Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn ... 216
Bài toán 5: Chứng minh tính chất hình học ... 218
Bài toán 6: Trục đẳng phương của hai đường tròn ... 221
Bài toán 7: Tập hợp điểm ... 225

CHƯƠNG III . PHÉP BIẾN HÌNH

Mở đầu ... 229
Chủ đề 1: Phép đối xứng tâm ... 232
Bài toán 1: Chứng minh tính chất hình học ... 233
Bài toán 2: Tìm tập hợp điểm ... 235
Bài toán 3: Dựng hình ... 236
Bài toán 4: Hệ toạ độ đối với phép đối xứng tâm ... 238
Chủ đề 2: Phép đối xứng trục ... 241
Bài toán 1: Chứng minh tính chất hình học ... 242
Bài toán 2: Sử dụng phép đối xứng trục tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất ... 246
Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm ... 248
Bài toán 4: Dựng hình ... 250
Bài toán 5: Hệ toạ độ đối với phép đối xứng trục ... 254
Chủ đề 3: Phép tịnh tiến ... 266
Bài toán 1: Chứng minh tính chất hình học ... 267
Bài toán 2: Tập hợp điểm ... 271
Bài toán 3: Dựng hình ... 273
Bài toán 4: Hệ toạ độ đối với phép tịnh tiến ... 275
Chủ đề 4: Phép quay ... 277
Bài toán 1: Chứng minh tính chất hình học ... 278
Bài toán 2: Tập hợp điểm ... 281
Bài toán 3: Dựng hình ... 283
Chủ đề 5: Phép vị tự ... 285
Bài toán 1: Chứng minh tính chất hình học ... 286
Bài toán 2: Tập hợp điểm ... 289
Bài toán 3: Dựng hình ... 291
TÀI LIỆU THAM KHẢO ... 293

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ba cuốn sách giáo khoa Hình học 10. Nhà xuất bản Giáo Dục.
2. *Trần Thành Minh (Chủ biên).* Giải toán Hình học 10. Nhà xuất bản Giáo Dục - 2001.
3. Tạp chí Toán học tuổi trẻ - Nhà xuất bản Gáo dục.
4. *Lê Hồng Đức - Trần Phương.* Chuyên đề Luyện thi Đại học Môn Toán - Hình học Giải tích. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.
5. *Lê Hồng Đức - Lê Hữu Trí.* Các phương pháp giải Toán Hình học Giải tích trong mặt phẳng. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.
6. *Lê Hồng Đức - Lê Bích Ngọc.* Các phương pháp giải Toán Lượng giác. Nhà xuất bản Hà Nội - 2002.
7. *Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Tạ Mân, Đào Tam, Lê Thống Nhất.* Các bài giảng luyện thi môn toán-Tập 3. Nhà xuất bản Giáo Dục - 1996.
8. Ba cuốn sách giáo khoa Đại số 10. Nhà xuất bản Giáo Dục.

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc:	PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập:	PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập:	NGUYỄN LAN HƯƠNG
Sửa bản in:	PHƯƠNG THẢO
Trình bày bìa:	HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN HÌNH HỌC 10

Mã số: 1L – 01021 – 01204
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại xí nghiệp in Đường Sắt.
Số xuất bản: 08/422/XB – QLXB, ngày 7/4/2004. Số trích ngang: 122KH/XB. In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2004.